ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°69

## Exercice 1 (**)

Soit $\lambda > 0$ et $y$ solution de $y'' + \left(1 + \dfrac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists \alpha \in \,]\,a\,;a+\pi\,[ \quad | \quad y(\alpha) = 0$$

**Corrigé :** On pose $\quad z = y'\varphi - y\varphi' \quad$ avec $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \sin(t-a)$

On a $$\forall t > 0 \qquad z'(t) = -\frac{\lambda}{t^2}\varphi(t)y(t)$$

Si $y$ ne s'annule pas sur $]\,a\,;a+\pi\,[$, alors $z$ est strictement monotone sur $[\,a\,;a+\pi\,]$, strictement croissante si $y < 0$ et strictement décroissante si $y > 0$. Or, on a

$$z(a+\pi) - z(a) = y(a+\pi) + y(a)$$

qui est en contradiction avec les monotonies précédemment annoncées. On conclut

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists \alpha \in \,]\,a\,;a+\pi\,[ \quad | \quad y(\alpha) = 0}$$

## Exercice 2 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que

$$f''(t) + f'(t) + f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Montrer $$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

**Corrigé :** On a vu dans l'exercice 1 de la feuille 68 que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\alpha > 0$, toute fonction $g$ telle que $g'(x) + \alpha g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ vérifie $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Soient $\alpha$ et $\beta$ des complexes et $g = f' + \alpha f$. Cherchons $\beta$ tel que

$$g' + \beta g = f'' + f' + f$$

On a $$g' + \beta g = f'' + f' + f \iff f'' + (\alpha+\beta)f' + \alpha\beta f$$

Si $\alpha + \beta = \alpha\beta = 1$, c'est-à-dire $\alpha$, $\beta$ racines de $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$, alors on a l'égalité souhaitée. On prend $\alpha = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\beta = \bar{\alpha}$. Alors, d'après le résultat préliminaire, comme $\operatorname{Re}\beta > 0$ et $g'(x) + \beta g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on obtient $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ c'est-à-dire $f(x) + \alpha f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et comme $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on conclut

$$\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0}$$

**Remarque :** On peut aussi poser $g = f''+f'+f$ puis considérer cette égalité comme une équation différentielle en $f$ que l'on résout par variation des constantes et enfin utiliser le comportement asymptotique de $g$. Cette démarche fonctionne mais s'avère beaucoup plus lourde que celle proposée ci-avant. On trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left[\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)/2}h(s)\,\mathrm{d}s$$

avec $$\forall s \in \mathbb{R} \qquad h(s) = \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right)\right] g(s)$$

et $\alpha$, $\beta$ des réels. Pour conclure sur le comportement asymptotique de l'intégrale dans l'écriture de $f$, on peut quantifier $h(s) = \mathrm{o}(1)$ et découper l'intégrale de manière appropriée ou aussi procéder par convergence dominée après changement de variables avec

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)/2} h(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{-u/2} h(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/2} h(t-u) \mathbb{1}_{[0\,;t]}(u)\,\mathrm{d}u$$

en observant

$$\mathrm{e}^{-u/2} h(t-u) \mathbb{1}_{[0\,;t]}(u) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \left|\mathrm{e}^{-u/2} h(t-u) \mathbb{1}_{[0\,;t]}(u)\right| \leqslant \|h\|_\infty \mathrm{e}^{-u/2}$$

## Exercice 3 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et $a > 0$. Montrer que l'équation

$$y'' - a^2 y = f \tag{L}$$

admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

**Corrigé :** Soit (H) l'équation homogène associée. On a

$$\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{at}, t \mapsto \mathrm{e}^{-at})$$

On procède ensuite par variation de la constante. Soient $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables avec $y : t \mapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{at} + \mu(t)\mathrm{e}^{-at}$ et telles que pour tout $t$ réel

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at} & \mathrm{e}^{-at} \\ a\mathrm{e}^{at} & -a\mathrm{e}^{-at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -a\mathrm{e}^{-at} & -\mathrm{e}^{-at} \\ -a\mathrm{e}^{at} & \mathrm{e}^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, il existe $\alpha, \beta$ réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \left(\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{at} + \left(\beta - \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-at}$$

Comme $f \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$, il vient par intégration des relations de comparaison

$$\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{=} \int_0^t \mathrm{O}(\mathrm{e}^{as})\,\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}s\right) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{at})$$

d'où $$\left(\beta - \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On a $\mathrm{e}^{-as} f(s) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s$ et par conséquent, la seule possibilité pour que $y$ admette une limite finie pour $t \to +\infty$ est d'avoir

$$\alpha = -\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s$$

On procède exactement de la même manière pour $t \to -\infty$ et on trouve

$$\beta = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s$$

En injectant les écritures intégrales de $\alpha$ et $\beta$ dans celle de $y$, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = -\frac{\mathrm{e}^{at}}{2a}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\mathrm{e}^{-at}}{2a}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s}$$

## Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $b$ réel et $a > 0$.

1. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, il existe une unique fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant

$$(\mathrm{C}) : \begin{cases} g' + ag = f(x) \\ g(0) = b \end{cases}$$

2. Montrer que si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $g$ l'est également et déterminer une relation entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Corrigé :** 1. Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, il existe une unique solution au problème de Cauchy (C) et on a $g$ de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } f \in \mathrm{E}, \text{ il existe une unique solution } g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ au problème (C).}}$$

**Remarque :** On trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-at}\left(b + \int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

2. Soit $x \geqslant 0$. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par intégration par parties (sur le segment $[\,0\,;x\,]$), on trouve

$$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\right]_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{at}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{a}\int_0^x |f(s)|\,\mathrm{d}s$$

L'intégrabilité de $f$ implique l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s$ et celle de $g$ s'ensuit puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est clairement intégrable. En procédant à l'identique mais en remplaçant $|f|$ par $f$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\right]_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{a}\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, on a pour tous $s$ et $x$ positifs

$$\mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x}\right| \leqslant |f(s)|$$

Ainsi, par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{a(s-x)} f(s)\mathbb{1}_{s\leqslant x}\,\mathrm{d}s \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Enfin, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est intégrable avec } \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(b + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right).}$$

## Exercice 5 (***)

Soit $q : [\,0\,;+\infty\,[ \to ]\,0\,;+\infty\,[$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $q'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer que toute solution de $y'' + q(x)y = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

**Corrigé :** On pose $z = y^2 + \dfrac{y'^2}{q}$. La fonction $z$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$z' = 2yy' + \frac{2y'y''q - y'^2q'}{q^2} = \frac{2y'(y''+qy) - y'^2q'}{q^2} = -\frac{y'^2q'}{q^2} \leqslant 0$$

Ainsi, la fonction $z$ est positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc bornée et il en résulte que $y$ aussi.

Ainsi $\boxed{\text{Toute solution de } y'' + q(x)y = 0 \text{ est bornée.}}$

**Remarque :** Comment penser à introduire une telle fonction auxiliaire ? Considérons le cas simple d'un oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega > 0$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = \mathrm{A}\cos(\omega x + \varphi) \quad \text{avec} \quad (\mathrm{A}, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{\omega^2} = \mathrm{A}^2\left[\cos^2(\omega x + \varphi) + \sin^2(\omega x + \varphi)\right] = \mathrm{A}^2$$

L'amplitude de la fonction est donc déterminée par $y^2 + \dfrac{y'^2}{\omega^2}$. On adapte alors cette idée au cas général.

**Variante :** En multipliant l'équation par $2y'$, il vient $2y'y'' = -2qyy'$ et après intégration

$$\forall x \geqslant 0 \qquad y'^2(x) - y'^2(0) = -\int_0^x q(t)y(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties, on trouve pour $x \geqslant 0$

$$y'^2(x) - y'^2(0) = [-q(t)y^2(t)]_0^x + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$q(x)y^2(x) = \mathrm{A} - y'^2(x) + \int_0^x q'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}q(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = q(0)y^2(0) + y'^2(0)$$

Par application du lemme de Gronwall appliqué avec $x \mapsto q(x)y^2(x)$, on obtient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad q(x)y^2(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x \frac{q'(t)}{q(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{A}\frac{q(x)}{q(0)}$$

d'où $$\forall x \geqslant 0 \qquad y^2(x) \leqslant \frac{\mathrm{A}}{q(0)} = y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{q(0)}$$

On en déduit que $y^2$ est bornée et donc $y$ également. Le majorant obtenu est exactement la valeur de la fonction auxiliaire de la méthode initiale évaluée en 0.

## Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ solution non nulle de l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = 0 \tag{H}$$

vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer l'inégalité

$$\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}$$

**Corrigé :** On a montré dans un autre exercice que les zéros de $u$ sont en nombre fini sur le segment $[\,a\,;b\,]$. On suppose que $a$ et $b$ sont deux zéros consécutifs de $u$ (le résultat sera vrai *a fortiori* pour tout couple de zéros de $u$). La fonction $u$ ne s'annule donc pas sur $]\,a\,;b\,[$. La fonction $|u|$ étant continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$, elle atteint son maximum et ailleurs qu'en les bornes, *i.e.* il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $|u(c)| = \underset{t\in[\,a\,;b\,]}{\mathrm{Max}}\,|u(t)|$. On a

$$\int_a^b |f(t)u(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant |u(c)| \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

et comme $u'' = -fu$, il vient pour tout $]\,\alpha\,;\beta\,[ \subset [\,a\,;b\,]$

$$\int_a^b |f(t)u(t)|\ \mathrm{d}t = \int_a^b |u''(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta |u''(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \left|\int_\alpha^\beta u''(t)\ \mathrm{d}t\right| = |u'(\beta) - u'(\alpha)|$$

d'où
$$\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{|u'(\beta) - u'(\alpha)|}{|u(c)|}$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in \,]\,a\,;c\,[$ et $\beta \in \,]\,c\,;b\,[$ tels que

$$\frac{u(c)-u(a)}{c-a} = u'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{u(b)-u(c)}{b-c} = u'(\beta)$$

Avec $u(a) = u(b) = 0$, il vient

$$\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \left|\frac{-1}{b-c} - \frac{1}{c-a}\right| = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

Une étude de fonction de $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{b-x} + \dfrac{1}{x-a}$ donne

$$\underset{x\in]\,a\,;b\,[}{\mathrm{Inf}}\ \varphi(x) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{4}{b-a}$$

On conclut
$$\boxed{\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}}$$

**Remarque :** Il s'agit de *l'inégalité de Liapounov.*

## Exercice 7 (****)

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + \mathrm{e}^t y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de $y$ est dénombrable.
2. On note $a_n$ le $n$-ième zéro positif de $y$. En considérant $\varphi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}(t-a_n)\right)$ et $\psi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_{n+1}}{2}}(t-a_n)\right)$, montrer
$$\pi \mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$
3. Déterminer un équivalent simple de $a_n$ pour $n \to +\infty$.

**Corrigé :** 1. On a montré dans un autre exercice que les zéros de $y$ sont en nombre fini sur tout segment. L'union des zéros de $y$ est l'union pour $k \in \mathbb{Z}$ de l'union des zéros de $y$ sur $[\,k\,;k+1\,]$, autrement dit c'est une union dénombrable d'ensembles finis donc c'est un ensemble au plus dénombrable. Montrons qu'il n'est pas fini. Supposons par exemple qu'il existe $a$ réel tel que $y(t) > 0$ pour tout $t \geqslant a$. On a $y''(t) = -\mathrm{e}^t y(t) < 0$ pour tout $t \geqslant a$ d'où la concavité de $y$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$. Supposons qu'il existe $\alpha \geqslant a$ tel que $y'(\alpha) < 0$. Par concavité, le graphe de $y$ est situé sous ses tangentes d'où

$$\forall t \geqslant a \qquad y(t) \leqslant y'(\alpha)(t-\alpha) + y(\alpha)$$

Puis
$$y'(\alpha)(t-\alpha) + y(\alpha) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad \Longrightarrow \quad y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

ce qui contredit le signe de $y$. On en déduit que $y' \geqslant 0$ d'où $y$ croît et en particulier $y(t) \geqslant y(a) > 0$ pour tout $t \geqslant a$. Par conséquent

$$\forall t \geqslant a \qquad y''(t) = -\mathrm{e}^t y(t) \leqslant -\mathrm{e}^t y(a) \quad \Longrightarrow \quad y''(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

Avec le théorème des accroissements finis ou un écriture intégrale, on en déduit

$$y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad \text{puis} \quad y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

ce qui contredit le signe de $y$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } y \text{ est dénombrable.}}$$

2. Supposons que $y$ ne s'annule pas sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} y(t) & \varphi(t) \\ y'(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix} = y(t)\varphi'(t) - y'(t)\varphi(t)$$

La fonction W est dérivable et on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{W}'(t) = y(t)\varphi''(t) - y''(t)\varphi(t) = y(t)\varphi(t)(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{a_n})$$

Ainsi, la fonction W′ est de signe constant sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$ égal au signe de $y$ sur cet intervalle. Or, on a

$$\mathrm{W}(a_n) = \underbrace{y(a_n)}_{=0}\varphi'(a_n) - y'(a_n)\underbrace{\varphi(a_n)}_{=0} = 0$$

et
$$\mathrm{W}(a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}) = y(a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}})\varphi'(a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}) = -\mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}} y(a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}})$$

Le signe de $\mathrm{W}(a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}})$ contredit alors la monotonie de W. On en déduit que $y$ s'annule sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$ d'où $a_{n+1} \in \left]\, a_n\,; a_n + \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}\,\right]$ et par suite

$$a_{n+1} - a_n \leqslant \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$

De la même manière, on démontre l'autre inégalité et on conclut

$$\boxed{\pi\mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}}$$

3. La suite $(a_n)_n$ est croissante non majorée sinon, elle aurait une limite finie et un segment contiendrait une infinité de zéros de $y$. Ainsi, on a $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et il s'ensuit $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par conséquent $\mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$. On a donc

$$a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$

On pose $u_n = \mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}$ pour $n$ entier. On a

$$2\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{u_n}$$

Or
$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \quad \text{puisque} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

On obtient donc
$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Par sommation des relations de comparaison, on en déduit

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{2}$$

On conclut
$$\boxed{a_n = 2\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n}$$