ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°67

Exercice 1 (*)

Résoudre sur $\mathrm{I} =]\,1\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$(1-t^3)x' + 3t^2x + x^2 = 0 \tag{E}$$

On cherchera les solutions de (E) qui ne s'annulent pas.

Exercice 2 (*)

Soient u, v dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de
$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$
2. Déterminer, en fonction de λ, la forme des fonctions u et v.

Exercice 3 (*)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 4 (**)

Résoudre sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' + y = \tan(t) \tag{L}$$

Exercice 5 (*)

Résoudre sur $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = \ln(t)$$

avec le changement de variable $t = \mathrm{e}^{u}$.

Exercice 6 (**)

Former le développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(x))$.

Exercice 7 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^{x} \tag{E}$$

Exercice 8 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\quad f'' + f \geqslant 0$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$$

Exercice 9 (**)

Chercher les solutions développables en série entière des équations homogènes associées puis résoudre complètement les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $(1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
2. $4tx'' + 2x' - x = 0$ sur $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$

Exercice 10 (**)

Soit y solution de $y'' + a(t)y = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que y s'annule au moins une fois.

Exercice 11 (**)

On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

où q est une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Soit y une solution bornée de (H). Étudier le comportement de y' en $+\infty$.
2. Montrer que (H) admet des solutions non bornées.