ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°68

Exercice 1 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et un complexe α avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ tel que

$$f'(x) + \alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Montrer
$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Exercice 2 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$t f'(t) - 2f(-t) = t \tag{E}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, utiliser le changement de variables $t = \mathrm{e}^u$ puis déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 (**)

1. Soit n entier. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + y = \cos(nt)$$
2. Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 4 (***)

Soient p, q dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

1. Montrer qu'une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.
2. Soit (f, g) une base de solutions de (H) et $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f. Montrer que g admet un un unique zéro dans $]\,\alpha\,;\beta\,[$.

Exercice 5 (***)

Soient f, g continues sur $\mathbb{R}_+$ avec g positive et vérifiant

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \geqslant 0$$

Montrer
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 6 (***)

Soit z solution de $z'' - a(t)z = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que $z = 0$ ou bien que z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (***)

Soient $f, g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continues avec f positive. On s'intéresse au *problème aux limites* (P) :

$$\begin{cases} y'' = f(t)y + g(t) & \text{(L)} \\ y(a) = y(b) = 0 & \text{(B)} \end{cases}$$

1. Soit $y \in \mathrm{S_H}$ avec (H) homogène associée à (L). Montrer que y^2 est convexe.
2. On pose $$\Phi : \begin{cases} \mathrm{S_H} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \longmapsto (y(a), y(b)) \end{cases}$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme.
3. Conclure que le problème aux limites (P) admet une unique solution.

Exercice 8 (***)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec un second membre g à préciser.
2. En déduire la valeur des intégrales
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\cos(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 (***)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction T-périodique avec $\mathrm{T} > 0$. On considère l'équation

$$y' + \alpha y = b(x) \tag{L}$$

1. Montrer que si f est solution de (L), alors $f_\mathrm{T} : x \mapsto f(x + \mathrm{T})$ est aussi solution de (L).
2. En déduire que f solution de (L) est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(\mathrm{T})$.
3. Montrer que, sauf pour certaines valeurs de α, l'équation (L) admet une unique solution T-périodique.