ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°69

Exercice 1 (**)

Soit $\lambda > 0$ et y solution de $y'' + \left(1 + \dfrac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists \alpha \in \,]\,a\,;a+\pi\,[\quad | \quad y(\alpha) = 0$$

Indications : Poser $z = y'\varphi - y\varphi'$ où $\varphi(t) = \sin(t-a)$.

Exercice 2 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que

$$f''(t) + f'(t) + f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Montrer
$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Indications : Déterminer des complexes α et β tels que $g = f' + \alpha f$ et $g' + \beta g = f'' + f' + f$ puis utiliser le résultat de l'exercice 1 feuille 68.

Exercice 3 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée et $a > 0$. Montrer que l'équation

$$y'' - a^2 y = f \tag{L}$$

admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Indications : Procéder par variation de la constante. Utiliser l'intégration des relations de comparaison en $+\infty$ et $-\infty$ pour déterminer les constantes garantissant le caractère borné de la fonction.

Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, b réel et $a > 0$.

1. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, il existe une unique fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant
$$(\mathrm{C}) : \begin{cases} g' + ag = f(x) \\ g(0) = b \end{cases}$$
2. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors g l'est également et déterminer une relation entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Indications : 2. Pour l'intégrabilité de g, considérer la solution du problème de Cauchy avec $|f(x)|$ pour second membre puis utiliser une intégration par parties sur un segment. Pour la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$, passer également par une intégration par parties sur un segment puis utiliser judicieusement le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite du crochet.

Exercice 5 (***)

Soit $q : [\,0\,;{+\infty}\,[\to]\,0\,;{+\infty}\,[$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $q'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer que toute solution de $y'' + q(x)y = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Indications : Considérer $z = y^2 + \dfrac{y'^2}{q}$.

Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ solution non nulle de l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = 0 \qquad \text{(H)}$$

vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer l'inégalité

$$\int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{b-a}$$

Indications : Rappeler que les zéros de u sont en nombre fini sur le segment $[\,a\,;b\,]$ puis montrer qu'on peut supposer que a et b sont zéros consécutifs. Justifier qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $|u(c)| = \underset{t\in[\,a\,;b\,]}{\mathrm{Max}}\, |u(t)|$ puis minorer $\displaystyle\int_a^b |f(t)u(t)| \,\mathrm{d}t$ sur tout intervalle $]\,\alpha\,;\beta\,[\subset [\,a\,;b\,]$. Invoquer ensuite le théorème des accroissement finis sur $]\,a\,;c\,[$ et $]\,c\,;b\,[$ et conclure avec une étude de fonction bien choisie.

Exercice 7 (****)

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + \mathrm{e}^t y = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y est dénombrable.
2. On note a_n le n-ième zéro positif de y. En considérant $\varphi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}(t - a_n)\right)$ et $\psi : t \mapsto \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a_{n+1}}{2}}(t - a_n)\right)$, montrer

$$\pi \mathrm{e}^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}}$$

3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \to {+\infty}$.

Indications : 1. Montrer que l'ensemble des zéros est au plus dénombrable puis montrer qu'il est infini par l'absurde, en utilisant un argument de concavité et en déterminant le signe de y' sur un intervalle à choisir.
2. Supposer que y ne s'annule pas sur $\left]\, a_n\,; a_n + \pi \mathrm{e}^{-\frac{a_n}{2}} \,\right]$ puis considérer $y\varphi' - y'\varphi$.
3. Justifier que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} {+\infty}$ puis déterminer un équivalent de $a_{n+1} - a_n$ et poser ensuite $u_n = \mathrm{e}^{\frac{a_n}{2}}$. Conclure à l'aide de sommation de relations de comparaison.