Corrigé du devoir en temps libre n°11

Problème I

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\|\mathrm{M}\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$

D'où $$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \|\mathrm{M}\| = \sqrt{n}}$$

2. Soit p entier non nul. Il vient par téléscopage
$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left[\mathrm{A}^k - \mathrm{A}^{k+1}\right] = \frac{1}{p}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}^p)$$

puis $$\|\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\| \leqslant \frac{1}{p}(\|\mathrm{I}_n\| + \|\mathrm{A}^p\|) \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{p} \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

en remarquant $\mathrm{A}^p \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a donc prouvé
$$\frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Or, comme $1 \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$, la matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible et par continuité du produit matriciel
$$\boxed{\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$

3. Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \times \mathbb{R}^n$. On a
$$\langle \mathrm{X}, (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{AY}\rangle - \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle = \underbrace{\langle \mathrm{AX}, \mathrm{AY}\rangle}_{\mathrm{A}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} - \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle - \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle = 0$$

On en déduit $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \perp \mathrm{Im}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$ et avec le théorème du rang, on conclut
$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)}$$

4. Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$. On dispose de $(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \times \mathrm{Im}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$ unique tel que $\mathrm{X} = \mathrm{U} + \mathrm{V}$. Pour p entier non nul, on trouve
$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \mathrm{X} = \mathrm{U} + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \mathrm{V}$$

Puis, il existe $\mathrm{Z} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{V} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{Z}$ et comme vu à la question 2
$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{V} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k\right)\mathrm{Z} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \mathrm{X} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{U}$$

Notant $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on conclut
$$\boxed{\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{Q} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\, p_{\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)}}$$

5. Supposons qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$. On a donc $\mathrm{A}^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{B}$ et par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A}^k \times \mathrm{A} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{BA}$$

Par unicité de la limite, il s'ensuit $\mathrm{BA} = \mathrm{B}$, autrement dit $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0$ d'où $\mathrm{B} = 0$ par inversibilité de $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$. Or, par continuité de la norme, on a $\|\mathrm{A}^k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \|\mathrm{B}\|$ et comme la suite $\left(\|\mathrm{A}^k\|\right)_k$ est constante égale à $\sqrt{n}$, il s'ensuit $\|\mathrm{B}\| = \sqrt{n}$ ce qui contredit la nullité de B.

On conclut $\boxed{\text{La suite } (\mathrm{A}^k)_k \text{ n'est pas convergente.}}$

Variante : On peut utiliser une version vectorielle de Césaro, à démontrer en détail (preuve identique à la preuve classique), en montrant $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{B}$ et conclure comme ci-avant.

Problème II

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle$$

Le sens direct est alors immédiat. Supposons $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Pour $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, il vient

$$\langle u(x), y\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \langle u(e_i), e_j\rangle = -\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \langle e_i, u(e_j)\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

Ainsi $\boxed{u \text{ antisymétrique} \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$

2. Soit $(x,y) \in \mathrm{F}^\perp \times \mathrm{F}$. On a $u(y) \in u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ puis

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$$

ce qui prouve $u(\mathrm{F}^\perp) \perp \mathrm{F}$. On conclut $\boxed{u(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp}$

Variante : On peut aussi utiliser le fait que $u^* = -u$.

3.(a) D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_A. On dispose de $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. On conjugue puis on multiplie à gauche par $\mathrm{X}^\top$ et on trouve

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{A}\bar{\mathrm{X}} = \bar{\lambda}\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}}$$

Puis, on transpose l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et ensuite on multiplie à droite par $\bar{\mathrm{X}}$ et il vient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{A}\bar{\mathrm{X}} = -\lambda\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}}$$

Notant x_i les coordonnées de X, on trouve $\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$ puisque X est non nul. En soustrayant les deux égalités obtenues, on obtient

$$\left(\bar{\lambda} + \lambda\right)\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}} = 0$$

d'où $\lambda = -\bar{\lambda}$. Enfin comme la matrice A est inversible puisque u l'est, on a $0 \notin \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A})$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

3.(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. On note $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{i}\mathrm{X}_2$ et $\lambda = \mathrm{i}\mu$ avec $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$ colonnes réelles et μ réel. On a $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ libre (dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). En effet, on a X et $\bar{\mathrm{X}}$ associés à des valeurs propres distinctes d'où $(\mathrm{X}, \bar{\mathrm{X}})$ libre (dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$). Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha \frac{\mathrm{X} + \bar{\mathrm{X}}}{2} + \beta \frac{\mathrm{X} - \bar{\mathrm{X}}}{2\mathrm{i}} = 0 \iff \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}\right) \mathrm{X} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\mathrm{i}}\right) \bar{\mathrm{X}} = 0$$

Il s'ensuit $\quad (\alpha - \mathrm{i}\beta, \alpha + \mathrm{i}\beta) = (0,0) \iff \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \iff (\alpha, \beta) = (0,0)$

Par conséquent, la famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = \left(\dfrac{\mathrm{X} + \bar{\mathrm{X}}}{2}, \dfrac{\mathrm{X} - \bar{\mathrm{X}}}{2\mathrm{i}}\right)$ est libre. Or, on a

$$\mathrm{AX} = \mathrm{i}\mu \mathrm{X} \iff \mathrm{AX}_1 + \mathrm{i}\mathrm{AX}_2 = -\mu \mathrm{X}_2 + \mathrm{i}\mu \mathrm{X}_1 \iff \begin{cases} \mathrm{AX}_1 = -\mu \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{AX}_2 = \mu \mathrm{X}_1 \end{cases}$$

Notant x_1, x_2 les vecteurs de E tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} x_1 = \mathrm{X}_1$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} x_2 = \mathrm{X}_2$. La famille (x_1, x_2) est libre et notant $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2)$, on a $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ autrement dit

$$\boxed{\text{Il existe un plan vectoriel stable par } u.}$$

Variantes : (a) On peut aussi utiliser la décomposition en facteurs irréductibles de χ_u dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
(b) Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On observe

$$\langle u^2(x), y \rangle = -\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, u^2(y) \rangle$$

d'où $u^2 \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Par suite, il existe α réel et $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $u^2(x) = \alpha x$ et on vérifie sans difficulté que $\mathrm{Vect}\,(x, u(x))$ constitue un plan stable par u.

3.(c) Notons $n = \dim \mathrm{E}$ entier non nul (le cas $n = 0$ est sans intérêt). On a

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^n \det(\mathrm{A})$$

et comme $\det(\mathrm{A}) \neq 0$ puisque la matrice A est inversible, il en résulte que $\dim \mathrm{E} = 2p$ avec p entier non nul. On procède par récurrence sur p. Si $p = 1$, la matrice A a la forme souhaitée à savoir $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec a réel non nul puisque $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 2$. On suppose le résultat vrai au rang $p - 1 \geqslant 1$. D'après ce qui précède, il existe un plan vectoriel F stable par E. On a

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^\perp$$

d'où $\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - 2 = 2(p-1)$. On note u_{F} et $u_{\mathrm{F}^\perp}$ les endomorphismes induits par u respectivement sur F et $\mathrm{F}^\perp$. Sans difficulté, ces endomorphismes induits sont antisymétriques. D'après le théorème du rang appliqué sur un endomorphisme induit par un automorphisme, ces endomorphismes sont également inversibles. Une base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de F garantit l'allure attendue pour $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1} u_{\mathrm{F}}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\mathscr{B}_2$ base orthonormée de $\mathrm{F}^\perp$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2} u_{\mathrm{F}^\perp}$. En concaténant $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \uplus \mathscr{B}_2$ une base orthonormée de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ est de la forme souhaitée. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe } \mathscr{B} \text{ orthonormée de E telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p) \\ \text{avec } \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } a_i \in \mathbb{R}^* \text{ pour tout } i \in [\![1 \,;\, p]\!]. \end{array}}$$

Variante : On peut établir la parité de $\dim \mathrm{E}$ en considérant χ_{A}. Si $\dim \mathrm{E}$ est impaire, alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction polynomiale continue $x \mapsto \chi_{\mathrm{A}}(x)$

admet une racine réelle puisque $\chi_{\mathrm{A}}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\chi_{\mathrm{A}}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, ce qui est absurde.

Remarque : On peut aussi mettre en place un procédé algorithmique. On construit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base orthonormée d'un plan F stable par u puis on poursuit sur $\mathrm{F}^{\perp}$. Le procédé s'arrête puisqu'on ne peut pas construire une famille orthonormée de cardinal $> \dim \mathrm{E}$. On s'arrête à une famille orthonormée de cardinal $2\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et on trouve que n pair sinon on disposerait d'un endomorphisme induit antisymétrique et inversible sur une droite vectorielle ce qui est impossible.

4. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}\ u \times \mathrm{E}$. On a $\quad \langle x, u(y)\rangle = -\langle u(x), y\rangle = 0$

ce qui prouve $\mathrm{Ker}\ u \perp \mathrm{Im}\ u$ et en particulier le fait que les sev sont en somme directe. Avec le théorème du rang $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\ u + \mathrm{rg}\ u$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\ u}$$

5. L'image $\mathrm{Im}\ u$ est clairement stable par u puisque $u(\mathrm{Im}\ u) \subset u(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}\ u$. L'endomorphisme $v = u_{\mathrm{Im}\ u}$ hérite du caractère antisymétrique de u. Pour $x \in \mathrm{Ker}\ v$, on a en particulier $x \in \mathrm{Ker}\ u$ et $x \in \mathrm{Im}\ u$ d'où $x \in \mathrm{Ker}\ u \cap \mathrm{Im}\ u = \{0_{\mathrm{E}}\}$ ce qui prouve

$$\boxed{v \text{ antisymétrique et } v \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im}\ v)}$$

6. On dispose d'une base orthonormée de $\mathrm{Im}\ v$ telle que la matrice de v dans cette base ait la forme $\mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p)$. En concaténant celle-ci avec une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\ u$, on construit une base orthonormée de E puisque les sev $\mathrm{Ker}\ u$ et $\mathrm{Im}\ u$ sont supplémentaires orthogonaux et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathscr{B} \text{ base orthonormée de E telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p).}$$

Problème III (bonus)

1. On a $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'où $\qquad \boxed{d_n \geqslant 1}$

2. Soit F sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{F} \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{C}_1 : \mathrm{F} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{M} \mapsto \mathrm{C}_1(\mathrm{M})$ l'application qui à $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa première colonne. C'est une application clairement linéaire et toute matrice dont la première colonne est nulle n'étant pas inversible, on en déduit que $\mathrm{Ker}\ \mathrm{C}_1 = \{0\}$. D'après le théorème du rang, il s'ensuit

$$\boxed{\dim \mathrm{F} = \mathrm{rg}\ \mathrm{C}_1 \leqslant \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n}$$

3. On suppose n impair. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ tel que (A, B) est libre. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det(t\mathrm{A} + \mathrm{B}) = (\det \mathrm{A}) \det(t\mathrm{I}_n + \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = (\det \mathrm{A})\, \chi_{-\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}}(t)$$

Comme $\deg \chi_{-\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}} = n$ est impair, le polynôme admet une racine réelle d'où l'existence de t réel tel que $t\mathrm{A} + \mathrm{B} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $t\mathrm{A} + \mathrm{B} \neq 0$ puisque (A, B) est libre. Il n'existe donc pas de famille libre de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal supérieur ou égal à 2. Avec la minoration établie à la première question, on conclut

$$\boxed{\forall n \in 2\mathbb{N} + 1 \qquad d_n = 1}$$

4. L'ensemble F est clairement combinaison linéaire d'une famille de quatre matrices. On vérifie sans difficultés que les colonnes de F sont orthogonales et ont même norme égale à $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Comme une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, il s'ensuit que $\mathrm{F} \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$.

On conclut $\qquad \boxed{d_4 = 4}$