Corrigé du devoir en temps libre n°12

Problème I

1. Avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{X}\sum_{i=2}^{n} L_i$, il vient

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X & -1 & \dots & -1 \\ -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - \dfrac{n-1}{X} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & X \end{vmatrix} = (X^2 - (n-1))X^{n-2}$$

La matrice B étant symétrique réelle, on conclut avec le théorème spectral

$$\boxed{\text{La matrice B est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } \operatorname{Sp}(B) = \left\{-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}, 0\right\}.}$$

2. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telle que $M = PDP^\top$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posant $Y = P^\top X$, il vient

$$\langle X, MX \rangle = X^\top MX = Y^\top P^\top APY = Y^\top DY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leqslant \operatorname{Max} \operatorname{Sp}(M) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

avec y_i les coordonnées de Y. On a $\|X\|^2 = X^\top X = Y^\top Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ et pour $X \in S(0,1)$, il s'ensuit $\langle X, MX \rangle \leqslant \operatorname{Max} \operatorname{Sp}(M)$ avec égalité pour le choix de $X = PY$ où $y_i = 0$ pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!] \setminus \{i_0\}$ et $y_{i_0} = 1$ avec $\lambda_{i_0} = \operatorname{Max} \operatorname{Sp}(M)$. On conclut

$$\boxed{\max \operatorname{Sp}(M) = \sup_{X \in S(0,1)} \langle X, MX \rangle}$$

3. On pose $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$. On a $A = D + B$ puis, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées x_i, on obtient

$$\langle X, AX \rangle = \langle X, DX \rangle + \langle X, BX \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \langle X, BX \rangle \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{i \in [\![1 \,;\, n]\!]} a_i\right) \|X\|^2 + \langle X, BX \rangle$$

Ainsi, avec les résultats des questions précédentes, on conclut

$$\boxed{\max \operatorname{Sp}(A) \leqslant \sqrt{n-1} + \operatorname*{Max}_{i \in [\![1 \,;\, n]\!]} a_i}$$

Problème II

1. Pour $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$, on pose

$$\varphi_{i,j} : E \to \mathbb{R}, A \mapsto a_{i,j} \qquad \psi_i : E \to \mathbb{R}, A \mapsto \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - 1\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - 1\right|$$

Ces applications sont continues et on a

$$\mathcal{B}_n = \bigcap_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varphi_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap \bigcap_{i=1}^{n} \psi_i^{-1}(\{0\})$$

ce qui prouve la fermeture de $\mathcal{B}_n$. Par ailleurs, pour $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{B}_n$, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad 0 \leqslant a_{i,j} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est un fermé borné de l'espace E de dimension finie ce qui prouve sa compacité. Et l'application φ est continue car linéaire sur l'espace E de dimension finie. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ atteint un minimum sur } \mathcal{B}_n.}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ et P, Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par orthogonalité de P et Q et propriété fondamentale de la trace, on a

$$\|\mathrm{PMQ}\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{P}^\top \mathrm{PMQ}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}^\top \mathrm{M}^\top \mathrm{MQ}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{MQQ}^\top) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M}) = \|\mathrm{M}\|^2$$

Ainsi $$\boxed{\forall (\mathrm{M},\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E} \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \|\mathrm{PMQ}\| = \|\mathrm{M}\|}$$

3. D'après le théorème spectral, on dispose de Q, R dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D_A}$, $\mathrm{D_B}$ diagonales réelles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{QD_AQ}^\top$ et $\mathrm{B} = \mathrm{RD_BR}^\top$. Ainsi

$$\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\| = \|\mathrm{QD_AQ}^\top - \mathrm{RD_BR}^\top\| = \|\mathrm{Q}\left(\mathrm{D_AQ}^\top\mathrm{R} - \mathrm{Q}^\top\mathrm{RD_B}\right)\mathrm{R}^\top\|$$

Posant $\mathrm{P} = \mathrm{Q}^\top\mathrm{R}$ orthogonale comme produit de matrices orthogonales, on conclut avec le résultat de la question précédente

$$\boxed{\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \|\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B}\|^2}$$

4. On a clairement $r_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ puis, la matrice P étant orthogonale, ses lignes et colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'où

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} r_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} r_{j,i} = 1$$

ce qui prouve $\mathrm{R} \in \mathcal{B}_n$. On trouve

$$\mathrm{D_AP} = \left(\lambda_i(\mathrm{A})p_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{PD_B} = \left(p_{i,j}\lambda_j(\mathrm{B})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Il vient alors $$\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|_2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\lambda_i(\mathrm{A})p_{i,j} - p_{i,j}\lambda_j(\mathrm{B})\right)^2$$

Autrement dit $$\boxed{\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} r_{i,j}\left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2}$$

5. On pose $$\forall \mathrm{M} = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2$$

L'application φ est une forme linéaire sur E et d'après le résultat de la première question, il existe $\gamma \in \mathrm{S}_n$ telle que

$$\varphi(\mathrm{M}_\gamma) = \operatorname*{Min}_{\mathcal{B}_n} \varphi$$

et $$\varphi(\mathrm{M}_\gamma) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \delta_{i,\gamma(j)}\left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{\gamma(j)}(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2$$

Ainsi $$\boxed{\operatorname*{Min}_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{\sigma(j)}(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2 \leqslant \|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^2}$$

Problème III (bonus)

1. Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de E. En effet, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0,\sqrt{n})$ d'où le caractère borné puis $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$ avec $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top \mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ à coordonnées polynomiales donc continue d'où la fermeture de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Cet ensemble est donc un fermé borné de l'espace E de dimension finie d'où sa compacité. Enfin, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{M})$ est 1-lipschitzienne donc continue et par conséquent atteint son minimum sur le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{R} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \|\mathrm{A}-\mathrm{R}\| = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|\mathrm{A}-\mathrm{M}\| = \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathcal{O}_n(\mathbb{R})).}$$

2. C'est la décomposition de Cartan. On suppose $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a clairement $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$ telles que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. Posant $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ puis $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$, on a $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}^\top\mathrm{A}$. En remarquant $\det(\mathrm{S})^2 = \det(\mathrm{A})^2 > 0$, on obtient $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et en particulier son inversibilité. Posant $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$, on trouve

$$\mathrm{O}^\top\mathrm{O} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n$$

Traitons le cas général. Supposons $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans E, on dispose de $(\mathrm{A}_k)_k$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A}$. Pour k entier, il existe $(\mathrm{O}_k,\mathrm{S}_k) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_k = \mathrm{O}_k\mathrm{S}_k$. Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une extractrice φ telle que $\mathrm{O}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. La suite $(\mathrm{A}_{\varphi(k)})_k$ converge vers A en tant que suite extraite de $(\mathrm{A}_k)_k$. Par continuité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{S}_{\varphi(k)} = {\mathrm{O}_{\varphi(k)}}^\top \mathrm{A}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O}^\top\mathrm{A}$$

On pose $\mathrm{S} = \mathrm{O}^\top\mathrm{A}$. C'est la limite d'une suite convergente à valeurs dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Or, cet ensemble est fermé. En effet, soit $(\mathrm{M}_k)_k \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{M}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M}$. La transposition est continue en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie d'où ${\mathrm{M}_k}^\top \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M}^\top$ puis, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par continuité du produit matriciel

$$\underbrace{\mathrm{X}^\top\mathrm{M}_k\mathrm{X}}_{\geqslant 0} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{X}^\top\mathrm{MX} \geqslant 0$$

On en déduit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\exists (\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$$

3. Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{P}\|^2 - \|\mathrm{A}-\mathrm{O}\|^2 = \|\mathrm{O}(\mathrm{S}-\mathrm{O}^\top\mathrm{P})\|^2 - \|\mathrm{O}(\mathrm{S}-\mathrm{I}_n)\|^2 = \|\mathrm{S}-\mathrm{O}^\top\mathrm{P}\|^2 - \|\mathrm{S}-\mathrm{I}_n\|^2$$

puisque la matrice O est une matrice d'isométrie. Puis

$$\begin{aligned}\|\mathrm{S}-\mathrm{O}^\top\mathrm{P}\|^2 - \|\mathrm{S}-\mathrm{I}_n\|^2 &= \|\mathrm{S}\|^2 - 2\left\langle \mathrm{S},\mathrm{O}^\top\mathrm{P}\right\rangle + \|\mathrm{O}^\top\mathrm{P}\|^2 - (\|\mathrm{S}\|^2 - 2\langle \mathrm{S},\mathrm{I}_n\rangle + \|\mathrm{I}_n\|^2)\\ &= 2\left\langle \mathrm{S},\mathrm{I}_n - \mathrm{O}^\top\mathrm{P}\right\rangle\end{aligned}$$

puisque $\|\mathrm{O}^\top\mathrm{P}\|^2 = \|\mathrm{I}_n\|^2 = n$ par orthogonalité de O, P et I_n. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $\mathrm{S} = \mathrm{QDQ}^\top$. Ainsi

$$\left\langle \mathrm{S},\mathrm{I}_n - \mathrm{O}^\top\mathrm{P}\right\rangle = \operatorname{Tr}\left((\mathrm{QDQ}^\top)^\top(\mathrm{I}_n - \mathrm{O}^\top\mathrm{P})\right) = \operatorname{Tr}\left(\mathrm{D}(\mathrm{I}_n - \mathrm{U})\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{U} = \mathrm{QO}^\top\mathrm{PQ}^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{Pour } \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{ il existe } \mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \|\mathrm{A}-\mathrm{P}\|^2 - \|\mathrm{A}-\mathrm{O}\|^2 = 2\langle \mathrm{D},\mathrm{I}_n - \mathrm{U}\rangle.}$$

4. Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On dispose de $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{P}\|^2 - \|\mathrm{A}-\mathrm{O}\|^2 = 2\langle \mathrm{D}, \mathrm{I}_n - \mathrm{U}\rangle = 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1-u_{i,i})$$

avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ semblable à S. Comme $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, les α_i sont positifs. Par ailleurs, les colonnes de U formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a $|u_{i,i}| \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Ainsi, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1-u_{i,i}) \geqslant 0$$

d'où $$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \|\mathrm{A}-\mathrm{P}\| \geqslant \|\mathrm{A}-\mathrm{O}\|$$

Passant à la borne inférieure sur $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on en déduit $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \geqslant \|\mathrm{A}-\mathrm{O}\|$ et celle-ci est clairement atteinte en O. On conclut

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|\mathrm{A}-\mathrm{O}\|}$$