Feuille d'exercices n°58

Exercice 1 (*)

Déterminer $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Corrigé : Soit x vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On a

$$\langle u(x), x\rangle = \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

D'après le théorème spectral, l'endomorphisme u est diagonalisable avec 0 comme unique valeur propre. On conclut

$$\boxed{u = 0}$$

Variante : Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = \underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{=0} + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \underbrace{\langle u(y), y\rangle}_{=0} \underbrace{=}_{u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})} 2\langle u(x), y\rangle = 0$$

Ceci prouve que $u(x) \in \mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ d'où la nullité de u. Cette variante élémentaire ne nécessite pas l'usage du théorème spectral.

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

Corrigé : Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par symétrie du produit scalaire, on a

$$\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{AX}\rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$$

puis

$$\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = (\mathrm{AX})^\top \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{X} = -\mathrm{X}^\top \mathrm{AX}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = 0}$$

Exercice 3 (*)

Montrer que le théorème spectral est une équivalence, à savoir pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E euclidien

$$u \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff \text{il existe une base orthonormée de vecteurs propres de } u$$

Corrigé : Le sens direct est un résultat du cours. Réciproquement, s'il existe une base $\mathscr{B}$ orthonormée de vecteurs propres de u, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ est diagonale et donc en particulier symétrique réelle ce qui prouve que $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. On conclut

$$\boxed{\text{Le théorème spectral est une équivalence.}}$$

Exercice 4 (*)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Établir l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ u$.

Corrigé : Soit $(y,x) \in \mathrm{Im}\ u \times \mathrm{Ker}\ u$. Il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(t)$. Puis, comme u est un endomorphisme auto-adjoint, il vient

$$\langle y, x\rangle = \langle u(t), x\rangle = \langle t, u(x)\rangle = \langle t, 0_{\mathrm{E}}\rangle = 0$$

On a donc $\mathrm{Im}\ u \perp \mathrm{Ker}\ u$ et d'après le théorème du rang, on sait $\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\ u + \dim \mathrm{Ker}\ u$. Ainsi, le noyau et l'image sont supplémentaires et orthogonaux et on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ u}$$

Variante : On a

$$x \in \mathrm{Ker}\ u \iff \forall y \in \mathrm{E} \quad \langle u(x), y\rangle = 0 \iff \forall y \in \mathrm{E} \quad \langle x, u(y)\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$$

Et comme le sev $\mathrm{Im}\ u$ est de dimension finie, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Im}\ u)^{\perp}$ et le résultat suit.

Exercice 5 (*)

Soit E euclidien et u, v dans $\mathscr{S}(\mathrm{E})$. Montrer

$$u \circ v \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff u \circ v = v \circ u$$

Corrigé : Soit $\mathscr{B}$ base orthonormée de E, $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ et $\mathrm{B} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} v$. Comme u et v sont des endomorphismes auto-adjoints, les matrices A et B sont symétriques réelles. Puis, on obtient

$$(\mathrm{AB})^{\top} = \mathrm{B}^{\top}\mathrm{A}^{\top} = \mathrm{BA}$$

d'où
$$(\mathrm{AB})^{\top} = \mathrm{AB} \iff \mathrm{AB} = \mathrm{BA}$$

Ainsi
$$\boxed{u \circ v \in \mathscr{S}(\mathrm{E}) \iff u \circ v = v \circ u}$$

Variante : Supposons $u \circ v \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$. Pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\langle (u \circ v - v \circ u)(x), y\rangle = \langle u \circ v(x), y\rangle - \langle v \circ u(x), y\rangle$$

puis
$$\langle u \circ v(x), y\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle \quad \text{et} \quad \langle v \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), v(y)\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (u \circ v - v \circ u)(x) \in \mathrm{E}^{\perp}$$

d'où $u \circ v = v \circ u$. Réciproquement, pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\langle u \circ v(x), y\rangle = \langle v(x), u(y)\rangle = \langle x, v \circ u(y)\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle$$

D'où l'équivalence annoncée.

Exercice 6 (*)

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}\mathrm{M}^{\top}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

Corrigé : Soit M telle que $\mathrm{M}\mathrm{M}^{\top}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. Ainsi, la matrice M est inversible d'inverse $\mathrm{M}^{\top}\mathrm{M}$. Comme M^{-1} est symétrique, il s'ensuit que M l'est aussi d'où $\mathrm{M}^3 = 1$ et par suite $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \{1, j, \bar{j}\}$. Mais on sait d'après le théorème spectral que le spectre de M est non vide et inclus dans $\mathbb{R}$ d'où $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) = \{1\}$, d'où M semblable à I_n et on conclut

$$\boxed{\text{L'unique matrice solution est } \mathrm{I}_n.}$$

Variante : Pour montrer que M est symétrique, on peut transposer dans l'égalité de départ pour obtenir $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\mathrm{M}^\top = \mathrm{I}_n$ d'où $\mathrm{M} = \mathrm{M}\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}^\top$ en multipliant par M à gauche. On procède ensuite comme précédemment.

Exercice 7 (*)

Déterminer les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M}^2 + 2\mathrm{M} = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$.

Corrigé : D'après le théorème spectral, on a M diagonalisable *via* un changement de base orthonormée. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)$ est annulateur de M. Il s'ensuit $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \{0, 1, 2\}$. Comme $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ est la somme des valeurs propres et que celles-ci sont positives, il résulte de $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$ que zéro est l'unique valeur propre de M donc M est semblable à la matrice nulle d'où finalement

$$\boxed{\mathrm{M} = 0}$$

Exercice 8 (**)

Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{U}\mathrm{U}^\top$. Montrer que M est diagonalisable puis préciser ses éléments propres.

Corrigé : On a
$$\mathrm{M}^\top = \left(\mathrm{U}\mathrm{U}^\top\right)^\top = \mathrm{U}\mathrm{U}^\top = \mathrm{M}$$

$$\boxed{\text{D'après le théorème spectral, la matrice M symétrique réelle est diagonalisable.}}$$

Munissons $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \mathrm{X}^\top\mathrm{Y}$ pour $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2$. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, on a $\mathrm{MX} = \mathrm{U}\,\langle \mathrm{U}, \mathrm{X} \rangle$ d'où

$$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{M} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{MU} = \|\mathrm{U}\|^2\mathrm{U}$$

ce qui prouve

$$\{0, \|\mathrm{U}\|^2\} \subset \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_0(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp \qquad \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}) \subset \mathrm{E}_{\|\mathrm{U}\|^2}(\mathrm{M})$$

Comme l'espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{M})$ est un hyperplan, pour raison de dimension, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) = \{0, \|\mathrm{U}\|^2\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_0(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})^\perp \quad \mathrm{E}_{\|\mathrm{U}\|^2}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U})}$$

Remarque : Notant $\alpha = \|\mathrm{U}\|^2$, on obtient par associativité du produit matriciel

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{U}(\mathrm{U}^\top\mathrm{U})\mathrm{U}^\top = \alpha\mathrm{M}$$

Comme $\mathrm{X}(\mathrm{X} - \alpha)$ est annulateur de M, on en déduit la localisation du spectre $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \subset \{0, \alpha\}$ ce qui oriente ensuite la rédaction vers la détermination de Ker M comme ci-avant.

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ puis montrer qu'on peut choisir $\mathrm{S} \in \mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

Corrigé : D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les λ_i positifs tels que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. Posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ puis $\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$, on a $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}$. Notons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{D}) = \{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$ avec $d \leqslant n$ et les μ_i deux à deux distincts. On note

$(\mathrm{L}_i)_{i\in[\![1\,;\,d]\!]}$ la famille de polynômes de Lagrange associés aux μ_i et on pose $\mathrm{R} = \sum\limits_{i=1}^{d} \sqrt{\mu_i}\mathrm{L}_i$. Ainsi, on a $\mathrm{R}(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et par suite

$$\mathrm{R}(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mathrm{PDP}^\top) = \mathrm{PR}(\mathrm{D})\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top = \mathrm{S}$$

Ainsi $$\boxed{\exists \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}[\mathrm{A}] \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{S}^2}$$

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

On pose $$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})\mathrm{P}'' + (2\mathrm{X} - 1)\mathrm{P}'$$

Montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation et du produit. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ d'où $\deg \mathrm{P}' \leqslant n-1$, $\deg \mathrm{P}'' \leqslant n-2$ et par conséquent

$$\deg \varphi(\mathrm{P}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})\mathrm{P}'', \deg(2\mathrm{X}-1)\mathrm{P}') \leqslant n$$

Par conséquent, on a $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Puis en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle &= \int_0^1 \left[(t^2 - t)\mathrm{P}''(t) + (2t-1)\mathrm{P}'(t)\right]\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[(t^2-t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (t^2-t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

expression symétrique en P et Q. On conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})}$$

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer $$(\det \mathrm{A})^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$$

Corrigé : D'après le théorème spectral, la matrice A est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Comme $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a les $\lambda_i \geqslant 0$. La trace et le déterminant étant invariants par similitude, on a

$$\det \mathrm{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\ \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Si les λ_i sont strictement positifs, il vient, d'après l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave $x \mapsto \ln x$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Ainsi $$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

L'inégalité (fameuse, c'est l'inégalité *arithmético-géométrique*) vaut toujours si les λ_i sont positifs largement. On conclut

$$\boxed{(\det \mathrm{A})^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$$

Exercice 12 (**)

Montrer
$$\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Corrigé : Notons $\mathrm{H}_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la *matrice de Hilbert* d'ordre n. On remarque
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ (à vérifier !). On a
$$\mathrm{H}_n = \left(\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
La matrice de Hilbert H_n est donc un cas particulier de matrice de Gram. Pour $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve
$$\mathrm{U}^\top \mathrm{H}_n \mathrm{U} = \|\sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}^i\|^2 \geqslant 0$$

Puis
$$\mathrm{U}^\top \mathrm{H}_n \mathrm{U} = 0 \iff \|\sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}^i\|^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}^i = 0 \iff \mathrm{U} = 0$$

Ainsi
$$\forall \mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \qquad \mathrm{U}^\top \mathrm{H}_n \mathrm{U} > 0$$

On conclut
$$\boxed{\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

Exercice 13 (**)

Déterminer a et b réels non nuls tels que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ puis décrire l'isométrie associée dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté.

Corrigé : Une matrice est dans $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si ses colonnes (ou lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On trouve
$$\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ b^2 + 2ab = 0 \end{cases}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff (a,b) \in \left\{(1,0), (-1,0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}}$$

Comme $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Par conséquent, la matrice A est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ d'après le théorème spectral et par localisation du spectre d'une matrice orthogonale. Un simple calcul de trace permet donc de savoir dans quelle configuration on se trouve. Pour $(a,b) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$, on a A semblable à $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$ matrice d'un demi-tour d'axe $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\,(1,1,1)$ et pour $(a,b) = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, on trouve A semblable à

$\mathrm{diag}(1,1,-1)$ matrice de la réflexion par rapport à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ d'équation $x+y+z=0$. Ainsi, notant $u=(1,1,1)$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{A}\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \mathrm{A}=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} f \quad \text{avec} \quad f\in\left\{\pm\,\mathrm{id}\,,\mathrm{rot}(u,\pi), s_{\mathrm{Vect}\,(u)^{\perp}}\right\}}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et S sa partie symétrique. Montrer

$$\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{R}}(\mathrm{M})\subset[\,\min\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,;\max\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,]$$

Corrigé : Par analyse/synthèse, on trouve l'unique décomposition $\mathrm{M}=\mathrm{S}+\mathrm{A}$ avec $(\mathrm{S},\mathrm{A})\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ où

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\top}}{2} \qquad \mathrm{A}=\frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}^{\top}}{2}$$

Ainsi, pour $\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient

$$\mathrm{X}^{\top}\mathrm{MX}=\mathrm{X}^{\top}\mathrm{SX}+\mathrm{X}^{\top}\mathrm{AX}$$

On remarque, en transposant le scalaire $\mathrm{X}^{\top}\mathrm{AX}$, l'égalité

$$\mathrm{X}^{\top}\mathrm{AX}=\left(\mathrm{X}^{\top}\mathrm{AX}\right)^{\top}=\mathrm{X}^{\top}\mathrm{A}^{\top}\mathrm{X}=-\mathrm{X}^{\top}\mathrm{AX}$$

ce qui prouve $\mathrm{X}^{\top}\mathrm{AX}=0$ et par conséquent

$$\mathrm{X}^{\top}\mathrm{MX}=\mathrm{X}^{\top}\mathrm{SX}$$

D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ telles que $\mathrm{S}=\mathrm{PDP}^{\top}$. Soit $\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\smallsetminus\{0\}$ et λ réel tel que $\mathrm{MX}=\lambda\mathrm{X}$. Posant $\mathrm{Y}=\mathrm{P}^{\top}\mathrm{X}$, il vient

$$\mathrm{X}^{\top}\mathrm{MX}=\lambda\|\mathrm{X}\|^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{X}^{\top}\mathrm{SX}=\mathrm{Y}^{\top}\mathrm{DY}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$

d'où
$$\min\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,\|\mathrm{Y}\|^2\leqslant\mathrm{X}^{\top}\mathrm{SX}\leqslant\max\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,\|\mathrm{Y}\|^2$$

Enfin, on a $\|\mathrm{Y}\|^2=\|\mathrm{X}\|^2$ car P orthogonale et comme $\mathrm{X}\neq 0$, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{R}}(\mathrm{M})\subset[\,\min\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,;\max\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})\,]}$$

Exercice 15 (**)

Soit E euclidien et $u\in\mathscr{S}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|=\max\{|\lambda|\,,\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)\}$$

Corrigé : D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit $i_0\in[\![\,1\,;n\,]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}|=\max\{|\lambda|\,,\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)\}$. Pour $x\in\mathrm{S}(0,1)$, on a

$$|\langle u(x),x\rangle|=\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right|\leqslant|\lambda_{i_0}|\sum_{i=1}^{n}x_i^2=|\lambda_{i_0}| \quad \text{et} \quad |\langle u(e_{i_0}),e_{i_0}\rangle|=|\lambda_{i_0}|$$

d'où
$$\sup_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|=\max\{|\lambda|\,,\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)\}$$

Puis
$$\|u(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2x_i^2\leqslant\lambda_{i_0}^2\|x\|^2=\lambda_{i_0}^2 \quad \text{et} \quad \|u(e_{i_0})\|=|\lambda_{i_0}|$$

On conclut
$$\boxed{\sup_{\|x\|=1}\|u(x)\|=\sup_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle|=\max\{|\lambda|\,,\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)\}}$$