ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°59

Exercice 1 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux de E. On note $u = p + q$.

1. Montrer que χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ puis établir $\mathrm{Sp}\,(u) \subset [\,0\,;2\,]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\ u$ et $\mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{id}\,)$.

Corrigé : 1. On a p, q dans $\mathscr{S}(\mathrm{E})$ d'où $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et d'après le théorème spectral

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable donc } \textit{a fortiori } \chi_u \text{ scindé dans } \mathbb{R}[X].}$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Les projecteurs p et q sont orthogonaux donc 1-lipschitziens d'après le théorème de Pythagore. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\|u(x)\| = |\lambda|\,\|x\| \leqslant \|p(x)\| + \|q(x)\| \leqslant 2\|x\|$$

et comme $\|x\| > 0$, il s'ensuit $|\lambda| \leqslant 2$. Puis

$$\langle p(x), x\rangle = \langle p(x), p(x) + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\ p = (\mathrm{Im}\ p)^{\perp}}\rangle = \|p(x)\|^2 \geqslant 0$$

De même pour $\langle q(x), x\rangle$ d'où $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ et comme $\langle u(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2$, il en résulte $\lambda \geqslant 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(u) \subset [\,0\,;2\,]}$$

2. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ u$, *i.e.* $p(x) + q(x) = 0_{\mathrm{E}}$. En reprenant les calculs précédemment effectués, on trouve

$$\langle p(x) + q(x), x\rangle = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 = 0$$

Ainsi
$$\mathrm{Ker}\ u \subset \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$$

et l'inclusion réciproque est immédiate. Puis, on a $2\,\mathrm{id}\,- u = \mathrm{id}\,- p + \mathrm{id}\,- q$ avec $\mathrm{id}\,- p$ et $\mathrm{id}\,- q$ qui sont des projecteurs orthogonaux respectivement associés à p et q. Ainsi, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(2\,\mathrm{id}\,- u) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}\,- p) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}\,- q) = \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q}$$

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $u(x) \perp x$.
2. En déduire l'existence d'une base orthonormée $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ de E telle que $\langle u(e_i), e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

Corrigé : 1. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u. Avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ (non nul car les ε_i sont libres), il vient

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \langle u(\varepsilon_i), \varepsilon_j\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i \underbrace{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}\,(u) = 0$$

Ainsi $$\boxed{\exists x \in \mathrm{E} \setminus \{0\} \quad | \quad u(x) \perp x}$$

2. D'après le résultat précédent, il existe e_1 que l'on peut normer tel que $u(e_1) \perp e_1$. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\,(e_1)^{\perp}$. L'application $p \circ u_{|\mathrm{Vect}\,(e_1)^{\perp}}$ induit un endomorphisme $v \in \mathscr{L}(\mathrm{Vect}\,(e_1)^{\perp})$. On vérifie sans difficulté que

$$\forall (x, y) \in \left(\mathrm{Vect}\,(e_1)^{\perp}\right)^2 \qquad \langle v(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

et on a $\mathrm{Tr}\ u = \mathrm{Tr}\ v = 0$ puisque $\langle u(e_1), e_1 \rangle = 0$. On peut aussi voir les choses matriciellement. Dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \mathscr{L})$ orthonormée adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(e_1) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\,(e_1)^{\perp}$, on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \mathrm{B} \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad \mathrm{B} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} v$$

Comme la matrice A est symétrique réelle de trace nulle, il en est de même pour la matrice B que l'on peut interpréter comme matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{Vect}\,(e_1)^{\perp}$ auto-adjoint et de trace nulle. Par récurrence sur la dimension, on peut donc conclure

$$\boxed{\exists (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \text{ base orthonormée de E} \quad | \quad \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \langle u(e_i), e_i \rangle = 0}$$

Exercice 3 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = g^2$.

Corrigé : Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de f (une telle base existe d'après le théorème spectral). On a $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ avec $\lambda_i \geqslant 0$. On définit $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. On a f et g^2 qui coïncident sur une base d'où $f = g^2$ et $g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrons l'unicité d'un tel endomorphisme. Soit $h \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $f = h^2$. Comme f est un polynôme en h, alors f et h commutent. Par suite, les sous-espaces propres de f sont stables par h. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, on note E_λ le sous-espace propre de f pour la valeur propre λ et h_λ l'endomorphisme induit par h sur E_λ. On a clairement $h_\lambda \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}_\lambda)$ et $h_\lambda^2 = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_\lambda}$ d'où $(\mathrm{X}^2 - \lambda)$ annulateur de h_λ. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme h_λ est diagonalisable avec $\sqrt{\lambda}$ comme unique valeur propre possible (car $-\sqrt{\lambda} \leqslant 0$) ce qui prouve que $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_\lambda}$. Comme $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda$, l'endomorphisme h est donc caractérisé et on conclut

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \qquad \exists!\, g \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E}) \quad | \quad f = g^2}$$

Remarque : On peut établir $g \in \mathbb{R}[f]$ et comme h et f commutent, alors h et g commutent et sont donc diagonalisables dans une même base. Pour x un vecteur de cette base, on a $h(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$ avec λ, $\mu \geqslant 0$. Avec l'égalité $h^2(x) = f(x) = g^2(x)$, il s'ensuit $\lambda^2 = \mu^2$ d'où $\lambda = \mu$ et les endomorphismes h et g coïncident donc sur cette base d'où l'unicité. Cet argument est moins efficace que celui présenté ci-avant puisqu'il s'appuie notamment sur la diagonalisation simultanée (à refaire).

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et φ définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\top \mathrm{S} \mathrm{X} - 2\mathrm{X}^\top \mathrm{B}$$

Montrer que φ admet un minimum et préciser où il est atteint.

Corrigé : Soit $\Delta \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = \Delta^2$. On a $\Delta \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque $(\det \Delta)^2 = \det S > 0$. Pour X et C dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en pensant à un début de « carré », on observe que

$$\|\Delta X - C\|^2 = X^\top \Delta^2 X - 2\langle \Delta X, C\rangle + \|C\|^2 = X^\top S X - 2X^\top \Delta C + \|C\|^2$$

On pose alors $C = \Delta^{-1}B$. Il vient

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \varphi(X) = \|\Delta X - \Delta^{-1}B\|^2 - \|B\|^2$$

et $\qquad \|\Delta X - \Delta^{-1}B\|^2 \geqslant 0 \quad$ et $\quad \|\Delta X - \Delta^{-1}B\|^2 = 0 \iff \Delta X = \Delta^{-1}B \iff X = S^{-1}B$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ admet un minimum atteint en } S^{-1}B.}$

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien de dimension n et $f \in \mathscr{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f.

1. Montrer que $\quad \forall x \in E \qquad \lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2$.
2. Montrer que si une des inégalités est une égalité avec $x \neq 0$, alors x est vecteur propre.
3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\langle f(e_i), e_i\rangle = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$.

   Montrer $\qquad \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad f(e_i) = \lambda_i e_i$

Corrigé : 1. D'après le théorème spectral, on a $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} E_\lambda(f)$. Pour $x \in E$, on note $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} x_\lambda$ sa décomposition dans la somme directe associée. On trouve

$$\forall x \in E \qquad \langle f(x), x\rangle = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \lambda\|x_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \|x_\lambda\|^2$$

la deuxième égalité résultant du théorème de Pythagore. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in E \qquad \lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2}$$

2. Supposons $\langle f(x), x\rangle = \lambda_n\|x\|^2$. Il s'ensuit

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f) \smallsetminus \{\lambda_n\}} \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{<0} \|x_\lambda\|^2 = 0 \iff x = x_{\lambda_n} \in E_{\lambda_n}(f)$$

La preuve est identique avec λ_1. On conclut

$$\boxed{\text{Si une des inégalités est une égalité avec } x \neq 0, \text{ alors } x \text{ est vecteur propre.}}$$

3. On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1 \geqslant 1$ et considérons E muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. D'après la question précédente, on a $f(e_n) = \lambda_n e_n$. Puis, on applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit $f_{\mathrm{Vect}\,(e_n)^\perp}$ et on conclut

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad f(e_i) = \lambda_i e_i}$$

Exercice 6 (***)

Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$

Corrigé : On peut trouver $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. D'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}^2\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{SBS})$$

et $\mathrm{SBS} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ sans difficulté. On en déduit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{SBS}) \geqslant 0$. Puis, considérant le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il vient d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

Notons $(\lambda_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ les valeurs propres de A. On a

$$\|\mathrm{A}\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2$$

De même pour $\|\mathrm{B}\|$ et on conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})^2 \qquad 0 \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})}$$

Variante : On peut faire sans racine carrée matricielle. On dispose, d'après le théorème spectral, de $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$. Par propriété fondamentale de la trace, il vient

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PDP}^\top\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{DB}') \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}' = \mathrm{P}^\top\mathrm{BP}$$

On vérifie sans difficulté $\mathrm{B}' \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Notant $\mathrm{B}' = \left(\beta_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et E_i la colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec 1 en i-ème ligne et des 0 ailleurs pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on obtient

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \beta_{i,i} = {\mathrm{E}_i}^\top \mathrm{B}'\mathrm{E}_i \geqslant 0$$

puis $\qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{DB}') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_{i,i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,j} \right) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})$

la dernière inégalité résultant de la positivité des λ_i et $\beta_{j,j}$.

Exercice 7 (***)

Soit E euclidien de dimension n, $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \left(\langle u_i, u_j \rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que $\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Application : Montrer qu'il existe $(v_1, \ldots, v_n)$ famille de vecteurs normés de E telle que $\|v_i - v_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On trouve

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{GX} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \langle u_i, u_j \rangle = \|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\|^2 \geqslant 0$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{G} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$

2. Supposons qu'il existe $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}^n$. Pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on obtient par polarisation

$$\langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{2}\left[\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2\right] = \frac{1}{2}$$

Soit G la matrice de Gram de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$. On a

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathrm{J} + \mathrm{I}_n) \quad \text{avec} \quad \mathrm{J} = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{G} \mathrm{X} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{X}^\top \mathrm{J} \mathrm{X} + \mathrm{X}^\top \mathrm{X}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \geqslant 0$$

Par conséquent, il existe une matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{S}^2 = \mathrm{S}^\top \mathrm{S}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On choisit alors $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}^n$ tel que $\mathrm{S} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{S}^\top \mathrm{S}$. Avec ces choix, on a pour $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$

$$\left(\mathrm{S}^\top \mathrm{S}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \langle v_i, e_k \rangle \langle v_j, e_k \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$$

On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une famille de vecteurs normés et équidistants dans E euclidien de dimension } n.}$$

Remarque : Si $\dim \mathrm{E} \geqslant n$, le résultat vaut aussi : il suffit de considérer une famille $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}^n$ libre.

Exercice 8 (***)

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\underset{\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PA})$.

Corrigé : L'application $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PA})$ est linéaire sur $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ espace de dimension finie donc continue. Le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de E et d'après le théorème des bornes atteintes, l'application φ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après le décomposition de Cartan, on sait qu'il existe $\mathrm{R} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{RS}$. On a $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{S}^2$ et par unicité de la racine carrée matricielle dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, la matrice S est unique. L'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{PR}$ réalise une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et par conséquent

$$\underset{\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}} \varphi(\mathrm{P}) = \underset{\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PS})$$

D'après le théorème spectral et la positivité de S, il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$ telles que $\mathrm{S} = \mathrm{QDQ}^\top$. Avec la propriété fondamentale de la trace, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PS}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PQDQ}^\top) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}^\top \mathrm{PQD})$$

Comme précédemment, l'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q}^\top \mathrm{PQ}$ réalise une permutation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, on obtient

$$\underset{\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}} \varphi(\mathrm{P}) = \underset{\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Max}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{PD})$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Le calcul donne $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{PD}) = \sum\limits_{i=1}^n p_{i,i} \lambda_i$. Comme la matrice P est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et il en résulte que $p_{i,j} \leqslant 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. Par positivité des λ_i, il vient pour

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{PD}) = \sum_{i=1}^n p_{i,i} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D})$$

majorant qui est atteint pour $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$. Les matrices D et S étant semblables, on conclut

$$\boxed{\operatorname*{Max}_{\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{Tr}(\mathrm{PA}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{S})}$$

Remarque : La matrice S est définie de manière unique par $\mathrm{S} = \sqrt{\mathrm{A}^\top \mathrm{A}}$.

Exercice 9 (****)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ uniques telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.
3. A-t-on l'unicité dans la question précédente ?

Corrigé : 1. S'il existe $(\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$, il s'ensuit $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}^\top\mathrm{A}$. Or, on a $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe une unique matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a S inversible puisque $(\det \mathrm{S})^2 = (\det \mathrm{A})^2 > 0$. Posons ensuite $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$. On a

$$\mathrm{O}^\top\mathrm{O} = (\mathrm{AS}^{-1})^\top \mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{AS} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$$

Le choix de O est unique puisqu'il découle du choix de S qui est unique. On conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \exists!(\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$$

2. On sait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(\mathrm{A}_p)_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathrm{A}$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \exists(\mathrm{O}_p,\mathrm{S}_p) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A}_p = \mathrm{O}_p\mathrm{S}_p$$

Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe φ extractrice telle que

$$\mathrm{O}_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Par ailleurs $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_p = {\mathrm{O}_p}^\top \mathrm{A}_p$

Par continuité du produit matriciel, la suite $\big(\mathrm{S}_{\varphi(p)}\big)_p$ converge. Montrons la fermeture de $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Soit $(\mathrm{M}_p)_p \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}$. Par continuité de la transposition (linéaire en dimension finie), on a $\mathrm{M}_p = {\mathrm{M}_p}^\top \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{M}^\top$ d'où $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}$ puis, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{X}^\top\mathrm{M}_p\mathrm{X} \geqslant 0$ pour tout p entier et par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{M}_p\mathrm{X} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{X}^\top\mathrm{MX} \geqslant 0$$

Il s'ensuit que $\mathrm{S}_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \exists(\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{OS}}$$

Remarques : (a) Ce résultat est intitulé *décomposition polaire* ou *décomposition de Cartan.*
(b) On peut éviter le raisonnement par densité en utilisant le résultat de l'exercice 9 feuille 59. Tout d'abord, il existe une unique matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. Notant f et s les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et S, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle s(e_i), s(e_j)\rangle$$

Alors, il existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tel que $g(s(e_i)) = f(e_i)$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ et le résultat suit.

3. Si 0 est valeur propre, l'unicité n'est plus garantie car n'importe quelle base orthonormée fait l'affaire pour l'espace propre $\mathrm{E}_0(\mathrm{A})$. Par exemple, avec

$$\mathrm{A} = \mathrm{diag}(1,0) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{diag}(1,-1)$$

On trouve $\quad \mathrm{A} = \mathrm{PS} = \mathrm{QS} \quad$ avec $\quad \mathrm{S} = \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})^2 \quad$ et $\quad \mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'unicité de la décomposition de Cartan n'est pas assurée pour une matrice non inversible.}}$$

Variante : Contre-exemple encore plus simple avec $\mathrm{A} = \mathrm{S} = 0$, $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{Q} = -\mathrm{I}_n$.

Exercice 10 (****)

Montrer que l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \qquad (\mathrm{O},\mathrm{S}) \qquad \longmapsto \mathrm{OS} \end{cases}$$

est un *homéomorphisme*, *i.e.* une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Corrigé : On admet l'existence et l'unicité d'une racine carrée matricielle dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $(\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$, il s'ensuit $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}^\top\mathrm{A}$. Or, on a $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe une unique matrice $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}^2$. On a S inversible puisque $\det(\mathrm{S})^2 = (\det \mathrm{A})^2 > 0$. On pose $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$. Il vient

$$\mathrm{O}^\top\mathrm{O} = \left(\mathrm{AS}^{-1}\right)^\top\mathrm{AS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^\top\mathrm{AS} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$$

Le choix de O est unique puisqu'il découle du choix de S qui est unique. L'application φ est donc bijective et continue par continuité du produit matriciel. Soit $(\mathrm{A}_k)_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrons $\varphi^{-1}(\mathrm{A}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi^{-1}(\mathrm{A})$. D'après ce qui précède, pour tout k entier, il existe $(\mathrm{O}_k,\mathrm{S}_k) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_k = \mathrm{O}_k\mathrm{S}_k$ et $(\mathrm{O},\mathrm{S}) \in\in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$. Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on dispose d'une extractrice φ telle que

$$\mathrm{O}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O}' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Par continuité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{S}_{\varphi(k)} = \mathrm{O}_{\varphi(k)}{}^\top\mathrm{A}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O}'^\top\mathrm{A}$$

La suite $(\mathrm{S}_k)_k$ est à valeurs dans le fermé $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'où $\mathrm{S}' = \mathrm{O}'^\top\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et comme il s'agit d'un produit de matrices inversibles, il s'ensuit $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc

$$\mathrm{O}'\mathrm{S}' = \mathrm{A} = \mathrm{OS} \quad \text{avec} \quad (\mathrm{O},\mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{O}',\mathrm{S}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Par unicité de la décomposition polaire, il vient $\mathrm{O}' = \mathrm{O}$ et $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Ceci prouve en particulier que la suite $(\mathrm{O}_k)_k$ à valeurs dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ admet O comme unique valeur d'adhérence. Il en résulte que $\mathrm{O}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O}$ et $\mathrm{S}_k = \mathrm{O}_k{}^\top\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O}^\top\mathrm{A} = \mathrm{S}$. On a donc établi

$$\varphi^{-1}(\mathrm{A}_k) = (\mathrm{O}_k,\mathrm{S}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} (\mathrm{O},\mathrm{S}) = \varphi^{-1}(\mathrm{A})$$

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un homéomorphisme.}}$$

Variante : On note $\sqrt{\cdot}$ la racine carrée matricielle bien définie sur $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi^{-1}(\mathrm{A}) = \left(\mathrm{A}\left(\sqrt{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}\right)^{-1}, \sqrt{\mathrm{A}^\top\mathrm{A}}\right)$$

On peut ensuite établir la continuité de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec des arguments similaires à ceux présentés ci-avant. La continuité de φ^{-1} s'ensuit.

Exercice 11 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : 1. Déjà vu.
2. Soit G sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$. On utilise le résultat de la décomposition polaire : il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$. Ainsi, on a $\mathrm{S} = \mathrm{O}^\top \mathrm{A} \in \mathrm{G}$ et par conséquent $\mathrm{S}^k \in \mathrm{G}$ pour tout k entier. La suite $(\mathrm{S}^k)_k$ est à valeurs dans G compact donc admet une sous-suite convergente. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top \mathrm{SP}$ est diagonale. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ normée avec $\mathrm{SX} = \lambda \mathrm{X}$. Si $\lambda > 1$, on a

$$\langle \mathrm{S}^k \mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle = \lambda^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'existence d'une sous-suite convergente. Si $\lambda < 1$, on trouve

$$\langle \mathrm{S}^k \mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle = \lambda^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

et une sous-suite convergente aurait une valeurs propre nulle ce qui contredit l'existence d'une valeur d'adhérence dans G. Par conséquent, on $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) = \{1\}$ et comme S est diagonalisable, elle est semblable à I_n et donc $\mathrm{S} = \mathrm{I}_n$, d'où $\mathrm{A} = \mathrm{O}$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{G} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 12 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe U, V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels positifs tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{V} \quad \text{avec} \quad \Delta = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Corrigé : 1. On a clairement $\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ puis, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^\top \mathrm{AX} \rangle = \mathrm{X}^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{AX} = \langle \mathrm{AX}, \mathrm{AX} \rangle \geqslant 0$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{A}^\top \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

2. Pour λ réel et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $\mathrm{A}^\top \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$, il vient

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{A}^\top \mathrm{AX} \rangle = \lambda \|\mathrm{X}\|^2 \geqslant 0$$

et comme $\|\mathrm{X}\|^2 > 0$, il s'ensuit $\lambda \geqslant 0$. Supposons $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \,]\,0\,; +\infty\,[$. D'après le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top \quad \text{avec} \quad \mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

et les $\lambda_i > 0$. On pose

$$\mathrm{V} = \mathrm{P}^\top \qquad \Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{AV}^\top \Delta^{-1}$$

ce qui est licite puisque Δ est diagonale avec des termes diagonaux non nuls donc inversible. Par construction, on a $\mathrm{A} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{V}$ et $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Puis, on vérifie

$$\mathrm{U}^\top \mathrm{U} = \Delta^{-1} \mathrm{VA}^\top \mathrm{AV}^\top \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \mathrm{VV}^\top \Delta^2 \mathrm{VV}^\top \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \Delta^2 \Delta^{-1} = \mathrm{I}_n$$

Ainsi, pour $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe U, V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et Δ diagonale à coefficients positifs telles que $\mathrm{A} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{V}$. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $(\mathrm{A}_k)_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{A}$. D'après le résultat préliminaire, pour tout k entier, il existe U_k, V_k dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_k diagonale à coefficients positifs telles que $\mathrm{A}_k = \mathrm{U}_k\mathrm{D}_k\mathrm{V}_k$. La suite $(\mathrm{U}_k, \mathrm{V}_k)_k$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ compact en tant que produit fini de compacts. Par conséquent, il existe φ extractrice telle que

$$(\mathrm{U}_{\varphi(k)}, \mathrm{V}_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$$

Par continuité du produit matriciel, on a

$$\mathrm{U}_{\varphi(k)}{}^{\top}\mathrm{A}_{\varphi(k)}\mathrm{V}_{\varphi(k)}{}^{\top} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{U}^{\top}\mathrm{A}\mathrm{V}^{\top} = \Delta$$

et comme la suite $\left(\mathrm{U}_k{}^{\top}\mathrm{A}_k\mathrm{V}_k{}^{\top}\right)_k$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients positifs qui est clairement un fermé, il en résulte que Δ est diagonale à coefficients positifs. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe U, V dans } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et les } \alpha_i \geqslant 0 \text{ tels que } \mathrm{A} = \mathrm{U}\Delta\mathrm{V} \text{ avec } \Delta = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).}$$

Remarque : Il s'agit de la *décomposition en valeurs singulières.*