Préparation à l'interrogation n°17

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos x$;
2. Développement limité à l'ordre 3 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \dots$
4. $\operatorname{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$

2 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
3. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$
4. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$;
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

4 Exercice type

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{S}_\mathrm{N}(\omega) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_k(\omega)$$

Montrer que S_N est une variable aléatoire discrète puis établir l'égalité $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_\mathrm{N}} = \mathrm{G}_\mathrm{N} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$.

Corrigé : Voir cours pour le caractère variable aléatoire. On a clairement $\mathrm{S}_\mathrm{N}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $t \in [0\,;1]$. Par transfert puis probabilités totales avec le système complet $(\{\mathrm{N}=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et indépendances des X_k avec N, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_{\mathrm{S}_\mathrm{N}}(t) &= \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S}_\mathrm{N}=j) = \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k = j, \mathrm{N}=n\right)\right)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k = j\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=n)\right)\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs et indépendance des X_k, on obtient

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_\mathrm{N}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j)\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)\mathbb{P}(\mathrm{N}=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t)^n \mathbb{P}(\mathrm{N}=n)$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{S}_\mathrm{N}} = \mathrm{G}_\mathrm{N}\circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}}$$

5 Inégalités de convexité/concavité

1. $\forall t > -1 \qquad \ln(1+t) \leqslant t\,;$
2. $\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1+t \leqslant \mathrm{e}^t\,;$
3. $\forall u \geqslant -1 \qquad (1+u)^\alpha \geqslant 1+\alpha u \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1\,;$
4. $\forall u \geqslant 0 \qquad 1-u^\alpha \leqslant \alpha(1-u) \quad$ avec $\quad \alpha \geqslant 1.$

6 Exercice type

Soient p, q dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

Montrer qu'une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.

Corrigé : Soit y solution non nulle de (H) et $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments deux à deux distincts de $[\,a\,;b\,]$ qui soient des zéros de y. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,a\,;b\,]$. Par continuité, on a

$$0 = y(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\alpha) = 0$$

Quitte à ré-extraire, on suppose $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour n entier. Par dérivabilité en α, il vient

$$0 = \frac{y(\alpha_{\varphi(n)}) - y(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} y'(\alpha)$$

La fonction y est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction nulle en est solution, il s'ensuit que y est nulle d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, ce qui est contradictoire. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.}}$$

7 Questions de cours

Équations différentielles, développements en série entière usuels, graphes usuels.