Corrigé du devoir en temps libre n°13

Problème I

1. Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\forall \omega \in \Omega \qquad 0 \leqslant \mathrm{Y}_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}_k(\omega)}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant 1$$

D'où $$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in [\,0\,;1\,]) = 1}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. La variable Y_n est d'espérance finie comme somme finie de variables aléatoires d'espérance finie et par linéarité

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X}_k)}{2^k} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Par suite $$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}}$$

3. Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On peut supposer quitte à échanger les rôles que $m \leqslant n$. On a

$$\mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_m + \mathrm{Z}_{m,n} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Z}_{m,n} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\mathrm{X}_k}{2^k}$$

Les variables Y_m et $\mathrm{Z}_{m,n}$ sont indépendantes comme fonctions de variables indépendantes et par suite

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Y}_m) = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_m + \mathrm{Z}_{m,n}, \mathrm{Y}_m) = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_m, \mathrm{Y}_m) + \underbrace{\mathrm{Cov}(\mathrm{Z}_{m,n}, \mathrm{Y}_m)}_{=0} = \mathbb{V}(\mathrm{Y}_m)$$

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes admettant des moments d'ordre 2 est simplement la somme des variances d'où

$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{X}_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X}_k)}{2^{2k}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4^2} \times \frac{1 - 1/4^n}{1 - 1/4}$$

On conclut $$\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_n, \mathrm{Y}_m) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{4^{\min(m,n)}}\right)}$$

En particulier, on en déduit que les variables $(\mathrm{Y}_n)_{n\geqslant 1}$ ne sont pas indépendantes.

Problème II

1. La variable X_1 est finie donc d'espérance finie et on trouve

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \sum_{k=0}^{2\mathrm{N}} k = \frac{2\mathrm{N}(2\mathrm{N}+1)}{2(2\mathrm{N}+1)} = \mathrm{N}}$$

2. On a $m = \mathrm{N}$ et par croissance stricte de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$ pour $t > 0$, on a

$$\boxed{\forall t>0 \qquad \left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{\mathrm{S}_n - n\mathrm{N} \geqslant \frac{n\mathrm{N}}{2}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})} \geqslant \mathrm{e}^{\,\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right\}}$$

3. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n-n\mathrm{N})}$ finie donc d'espérance finie, il vient

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n-n\mathrm{N})} \geqslant \mathrm{e}^{\,\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\,-\frac{tn\mathrm{N}}{2}} \times \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n-n\mathrm{N})}\right)$$

Puis, par indépendance des X_i

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n-n\mathrm{N})}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\,t(\mathrm{X}_i-\mathrm{N})}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{X}_i-\mathrm{N})}\right)$$

Par transfert

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{X}_i-\mathrm{N})}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\,-t\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}+1}\left[1+\mathrm{e}^{\,t}+\ldots+\mathrm{e}^{\,t2\mathrm{N}}\right] = \frac{\mathrm{e}^{\,-t\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}+1} \times \frac{1-\mathrm{e}^{\,(2\mathrm{N}+1)t}}{1-\mathrm{e}^{\,t}}$$

Avec une factorisation de type « angle moitié », on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{X}_i-\mathrm{N})}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\,-t\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}+1} \times \frac{\mathrm{e}^{\,(\mathrm{N}+1/2)t}}{\mathrm{e}^{\,t/2}} \times \frac{\mathrm{sh}\left((\mathrm{N}+1/2)t\right)}{\mathrm{sh}\left(t/2\right)} = \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \times \frac{\mathrm{sh}\left((\mathrm{N}+1/2)t\right)}{\mathrm{sh}\left(t/2\right)}$$

$$\boxed{\forall t>0 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\,n\varphi(t)} \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \ln\left(\frac{\mathrm{sh}\left((\mathrm{N}+1/2)t\right)}{\mathrm{sh}\left(t/2\right)}\right) - \ln(2\mathrm{N}+1)}$$

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\left((\mathrm{N}+1/2)t\right)}{\mathrm{sh}\left(t/2\right)}$ est paire comme quotient de deux fonctions impaires et son développement limité à l'ordre 1 donne

$$\left(\frac{\mathrm{sh}\left((\mathrm{N}+1/2)t\right)}{\mathrm{sh}\left(t/2\right)}\right) \underset{t\to 0}{=} (2\mathrm{N}+1) + \mathrm{o}(t)$$

Par suite

$$\varphi(t) = -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \ln\left((2\mathrm{N}+1)+\mathrm{o}(t)\right) - \ln(2\mathrm{N}+1) \quad \text{et} \quad \ln\left((2\mathrm{N}+1)+\mathrm{o}(t)\right) = \ln(2\mathrm{N}+1) + \mathrm{o}(t)$$

Ainsi $$\boxed{\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \mathrm{o}(t)}$$

5. D'après l'équivalent précédemment obtenu, la fonction φ prend des valeurs négatives au voisinage de zéro. On dispose donc de $t_0>0$ tel que $\varphi(t_0)<0$ et, avec le choix $r = \mathrm{e}^{\,\varphi(t_0)}$, on conclut

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant r^n \quad \text{avec} \quad r \in \left]\,0\,;1\,\right[}$$

Problème III

1. On note X_i le déplacement du pion à l'instant i. La suite $(\mathrm{X}_i)_{i\geqslant 1}$ est constituée de variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i=1)=p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i=-1)=1-p$ et on a $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour tout n entier. Les variables $\dfrac{1+\mathrm{X}_i}{2}$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$ d'où $\mathrm{U}_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1+\mathrm{X}_i}{2} \sim \mathscr{B}(n,p)$. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 2k-n) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Remarque : En particulier, on observe que $\mathrm{S}_n(\Omega) = \{k \in [\![-n\,;\,n]\!] \mid k+n \in 2\mathbb{N}\}$.

2. On observe
$$\{\mathrm{T} = n\} = \{\mathrm{S}_n = 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{\mathrm{S}_k \neq 0\}$$

En particulier, pour n entier, on a $\{\mathrm{T} = 2n+1\} \subset \{\mathrm{S}_{2n+1} = 0\}$ qui est impossible. Puis, pour n entier non nul, il vient en considérant le premier retour à l'origine en $2k$ avec $k \in [\![0\,;\,n]\!]$

$$\begin{aligned}\{\mathrm{S}_{2n} = 0\} &= \{\mathrm{S}_{2n} = 0\} \cap \bigsqcup_{k=1}^{2n} \{\mathrm{T} = k\} = \{\mathrm{S}_{2n} = 0\} \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} \{\mathrm{T} = 2k\} \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{n} \left\{\mathrm{T} = 2k, \mathrm{S}_{2k} + \sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right\} = \bigsqcup_{k=1}^{n} \{\mathrm{T} = 2k\} \cap \left\{\sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right\}\end{aligned}$$

Les événements $\{\mathrm{T} = 2k\}$ et $\left\{\sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right\}$ sont indépendants et il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2k)\mathbb{P}\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2(n-k)} = 0) = \sum_{k=1}^{n} q_{2k}p_{2(n-k)}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad p_{2n} = \sum_{k=0}^{n} q_{2k}p_{2(n-k)}}$$

3. Immédiat.

4. On considère $u : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n}t^n$ et $v : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_{2n}t^n$ dont le rayon de convergence est $\geqslant 1$. On a avec la complétion $q_0 = 0$

$$\forall t \in]-1\,;1[\qquad u(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}t^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{2k}p_{2(n-k)}\right) t^n$$

Par produit de Cauchy de séries entières, il vient

$$\forall t \in]-1\,;1[\qquad u(t) = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_{2n}t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n}t^n\right) = 1 + u(t)v(t)$$

Il s'ensuit
$$\forall t \in]-1\,;1[\qquad u(t^2) = 1 + u(t^2)v(t^2)$$

C'est-à-dire
$$\boxed{\forall t \in]-1\,;1[\qquad f(t) = 1 + f(t)g(t)}$$

5. En complétant les produits à la Wallis, il vient

$$\begin{aligned}\forall t \in]-1\,;1[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}\end{aligned}$$

6. Soit $t \in]-1\,;1[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+1} = 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p)t^2)^n$$

On a $4p(1-p) \in [0\,;1]$ d'où $4t^2p(1-p) \in [0\,;1[$ pour $t \in]-1\,;1[$ et on conclut

$$\boxed{\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2p(1-p)}}}$$

La fonction f croît sur $[\,0\,;1\,[$ comme somme (infinie) de fonctions croissantes d'où $f(t) \geqslant f(0) = 1 > 0$ pour $t \in [\,0\,;1\,[$ puis

$$\forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad g(t) = 1 - \frac{1}{f(t)} = 1 - \sqrt{1-4t^2p(1-p)}$$

En procédant comme à la question 5, on trouve

$$\forall t \in [\,-1\,;1\,[\qquad \sqrt{1-t} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n} t^n$$

d'où $$\forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n(1-p)^n t^{2n}$$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n} p^n(1-p)^n}{(2n-1)} = \frac{p_{2n}}{2n-1}}$$