ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°61

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) \subset [\,a\,;b\,]$.

1. Établir
$$\mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
2. Cette inégalité est-elle optimale ?

Corrigé : 1. La variable X est bornée et par conséquent X^2 également ce qui assure que celle-ci est d'espérance finie. Puis, il vient
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}\left(X - \frac{a+b}{2}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Ainsi
$$\boxed{\mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

Il s'agit de l'inégalité de *Popovicius.*

2. Avec $X \sim \mathscr{U}_{\{a,b\}}$, on a
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'inégalité obtenue est optimale puisqu'on a } \mathbb{V}(X) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.}$$

Remarque : L'inégalité de *Bathia-Davis* améliore l'inégalité de Popovicius mais le majorant fait intervenir $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. On suppose qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que
$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \qquad \|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k\| \leqslant C$$

Montrer
$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leqslant C^2$$

Corrigé : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Rademacher donc en particulier finies. On a
$$\mathbb{E}(\|\sum_{k=1}^n X_k u_k\|^2) \leqslant C^2$$
et par linéarité de l'espérance
$$\mathbb{E}(\|\sum_{k=1}^n X_k u_k\|^2) = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle u_i, u_j \rangle\, \mathbb{E}(X_i X_j) = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leqslant C^2}$$

Remarque : On peut faire sans probabilités, par récurrence, mais c'est beaucoup moins joli.

Exercice 3 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle finie. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L_X}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$$

Montrer que $\mathrm{L_X}$ caractérise la loi de X.

Corrigé : Notons $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Par transfert, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{L_X}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_k} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

Par dérivation $$\forall (t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{L_X^{(p)}}(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k^p \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

D'où $$\begin{pmatrix} \mathrm{L_X}(0) \\ \vdots \\ \mathrm{L_X^{(n-1)}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n) \end{pmatrix}$$

On a une matrice de Vandermonde inversible d'où la caractérisation de $(\mathbb{P}(\mathrm{X} = x))_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \mathrm{L_X} \text{ caractérise la loi de X.}}$$

Remarque : On appelle $\mathrm{L_X}$ la *transformée de Laplace* de la variable aléatoire X. Le résultat ci-avant vaut encore pour X variable aléatoire discrète positive mais c'est une autre affaire ...

Variante : Soit $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Il vient

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathrm{L_X}(j) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{jx_k} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{x_k}) \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

Les e^{x_k} sont distincts par injectivité de l'exponentielle et en choisissant pour P les polynômes de Lagrange associés aux e^{x_k}, on peut isoler $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$ dans la somme ce qui prouve que la loi de X est caractérisée par $\mathrm{L_X}$.

Exercice 4 (**)

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [\,0\,;1\,]$.

1. Rappeler la loi de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.
2. Pour $0 \leqslant m < n$, déterminer la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{\mathrm{S}_m | \mathrm{S}_n = \ell}$ avec $\ell \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$.

Corrigé : 1. La variable aléatoire S_n est somme de variables indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n, p)}$$

2. On a $$\forall k \in [\![\,0\,;\,m\,]\!] \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_m = k | \mathrm{S}_n = \ell\right) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{S}_m = k, \mathrm{S}_n = \ell)}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = \ell)}$$

Notons $\mathrm{T}_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n} \mathrm{X}_i$. On a $\mathrm{T}_{m,n} \sim \mathscr{B}(n-m, p)$ indépendant de S_m puis

$$\mathbb{P}(S_m = k, S_n = \ell) = \mathbb{P}(S_m = k, S_m + T_{m,n} = \ell)$$
$$= \mathbb{P}(S_m = k, T_{m,n} = \ell - k) = \mathbb{P}(S_m = k) \times \mathbb{P}(T_{m,n} = \ell - k)$$

On a $$\forall k > \ell \qquad \mathbb{P}(S_m = k | S_n = \ell) = 0$$

et $$\forall k \in [\![0\,;\, \ell]\!] \qquad \mathbb{P}(S_m = k | S_n = \ell) = \frac{\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \binom{n-m}{\ell-k} p^{\ell-k} (1-p)^{n-m-(\ell-k)}}{\binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell}}$$

d'où $$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, \ell]\!] \qquad \mathbb{P}(S_m = k | S_n = \ell) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{\ell-k}}{\binom{n}{\ell}}}$$

Cette loi est appelée loi *hypergéométrique*. On en déduit en particulier la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{\ell} \mathbb{P}(S_m = k | S_n = \ell) = 1 \iff \sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k}\binom{n-m}{\ell-k} = \binom{n}{\ell}$$

Exercice 5 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$.

1. Montrer $\quad \forall (t, \varepsilon) \in \,]\, 0\,;+\infty\, [^2 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-tn\varepsilon} \operatorname{ch}^n t$

2. Pour $t > 0$, comparer $e^{\frac{t^2}{2}}$ et $\operatorname{ch} t$.

3. En déduire $\quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}$

Corrigé : 1. Soit $t, \varepsilon > 0$. Par croissance stricte de $u \mapsto e^{tu}$, on a

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant n\varepsilon\right\} = \left\{\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \geqslant e^{tn\varepsilon}\right\}$$

D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire finie positive $\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$, il vient

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-tn\varepsilon}\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

Or $$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right)$$

et par indépendance puis égalité en loi des X_i, il vient

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i}) = \left(\mathbb{E}(e^{tX_1})\right)^n$$

Par transfert $$\mathbb{E}(e^{tX_1}) = e^t\mathbb{P}(X_1 = 1) + e^{-t}\mathbb{P}(X_1 = -1) = \operatorname{ch} t$$

On conclut $$\boxed{\forall (t, \varepsilon) \in \,]\, 0\,;+\infty\, [^2 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-tn\varepsilon} \operatorname{ch}^n t}$$

2. D'après les développements en série entière usuels, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Une récurrence immédiate permet de prouver que $2^n n! \leqslant (2n)!$ pour tout n entier d'où

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} t \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$$

Variante : On peut éviter une récurrence avec

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k = \prod_{k=1}^{n} (2k) \times \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 2^n n! \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

3. Soient $t, \varepsilon > 0$. On obtient $\qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$

En choisissant $t = \varepsilon$, il vient

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}}$$

Remarque : Le choix $t = \varepsilon$ est optimal sur la dernière égalité puisqu'il s'agit de la valeur de t qui minimise le trinôme dans l'exponentielle.

Exercice 6 (*)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right)$.

Corrigé : On a $\qquad \left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right\} = \left\{\mathrm{S}_n - \frac{n}{2} \geqslant \frac{n}{6}\right\} \subset \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{6}\right\}$

D'où $\qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{6}\right)$

D'après la loi faible des grands nombres, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{6}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par comparaison $\qquad \boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{2n}{3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Exercice 7 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1 ; \mathrm{N}]\!]$ et $f \in \mathscr{C}^1([1 ; \mathrm{N}], \mathbb{R})$. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul.

1. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2$, comparer $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.
2. Montrer $\qquad \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\mathbb{E}(\mathrm{X}_1))$

Corrigé : 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux variables aléatoires X et 1 (constante), il vient

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X})^2 = \mathbb{E}(\mathrm{X} \times 1)^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) \times \mathbb{E}(1^2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)}$$

Remarque : On peut aussi invoquer la relation de König-Huygens et la positivité de $\mathbb{V}(\mathrm{X})$:

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 \geqslant 0$$

2. Les variables X_i et S_n sont finies donc dans L^2. Notons $m = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\,1\,;\mathrm{N}\,]$ donc C-lipschitzienne avec $\mathrm{C} \geqslant 0$ d'après l'inégalité des accroissements finis. Puis

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(m)\right|\right)^2 \leqslant \mathrm{C}^2 \times \mathbb{E}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - m\right|\right)^2 \leqslant \mathrm{C}^2 \times \mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} - m\right)^2\right]$$

Comme $\mathbb{E}\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = m$, on remarque que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} - m\right)^2\right] = \mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$$

Par indépendance des U_i, il vient

$$\mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{U}_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(\mathrm{U}_i) =)\frac{1}{n}\mathbb{V}(\mathrm{U}_1) = \mathrm{o}(1)$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(m)\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(m)\right|\right)$$

et par encadrement

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{C}^1([\,1\,;\mathrm{N}\,],\mathbb{R}) \qquad \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f(m)) = f(m)}$$

Exercice 8 (**)

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ et N une variable aléatoire indépendante des X_i avec $\mathrm{N} \sim \mathscr{B}(n,p)$ où n est un entier non nul et $p \in\,]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{Y} = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}_i$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire réelle discrète.
2. Déterminer la loi de Y à l'aide de fonctions génératrices mais sans recours aux familles sommables. On pourra utiliser la variable aléatoire $\sum\limits_{j=0}^{n}\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.

Corrigé : 1. On a

$$\mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}_i = f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{N}) \quad \text{avec} \quad f(x_1, \ldots, x_n, m) = \sum_{i=1}^{m}x_i$$

Ainsi, on a Y fonction de variables aléatoires discrètes et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application Y est une variable aléatoire réelle discrète.}}$$

2. Soit $t \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\mathrm{G}_{\mathrm{N}}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{N}}) = \sum_{k=0}^{n}t^k\mathbb{P}(\mathrm{N}=k) = \sum_{k=0}^{n}t^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(tp)^k(1-p)^{n-k}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{N}}(t) = (tp + 1 - p)^n}$$

Avec le système complet $(\{\mathrm{N}=j\})_{j\in[\![0\,;n]\!]}$, on trouve

$$\mathrm{G_Y}(t)=\mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}})=\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{N}}t^{\mathrm{X}_i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}\right)\right]=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=1}^{j}t^{\mathrm{X}_i}\right)\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}}\right]$$

Par indépendance des X_i avec N puis indépendance des X_i entre elles, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{G_Y}(t)&=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i\right)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}=j\}})\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j}\mathbb{E}(t^{\mathrm{X}_i})\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)=\sum_{j=0}^{n}\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}^{j}(t)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G_Y}=\mathrm{G_N}\circ\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}}$$

Remarque : La preuve utilise un argument assez fin. Une variante plus naïve serait :
Par transfert, on a pour t réel

$$\mathrm{G_Y}(t)=\mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}})=\sum_{k=0}^{n}t^{t}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)$$

En considérant le système complet $(\{\mathrm{N}=j\})_{j\in[\![0\,;n]\!]}$, il vient d'après la formule des probabilités totales pour $k\in[\![0\,;n]\!]$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}_i=k,\mathrm{N}=j\right)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k,\mathrm{N}=j\right)$$

et par indépendance des X_i avec N

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)$$

On remarque que $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k)=0$ pour $j<k$ d'où

$$\mathrm{G_Y}(t)=\sum_{k=0}^{n}t^{k}\left(\sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\right)=\sum_{0\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k)t^{k}$$

En changeant l'ordre de sommation, notant $\mathrm{Z}_j=\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i$, on obtient

$$\mathrm{G_Y}(t)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\left(\sum_{k=0}^{j}t^{k}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k)\right)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_j}(t)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t)^{j}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{G_Y}=\mathrm{G_N}\circ\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}}$$

Pour $t\in[\,0\,;1\,]$, il vient

$$\mathrm{G_Y}(t)=\mathrm{G_N}(tx+1-x)=[(tp+1-p)p+1-p]^{n}=(tp^2+1-p^2)^{n}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{\text{La variable aléatoire Y suit la loi binomiale }\mathscr{B}(n,p^2).}$$

3. Soit $k\in\mathrm{Y}(\Omega)\subset[\![0\,;n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales sur le système complet $(\{\mathrm{N}=j\})_{j\in[\![0\,;n]\!]}$ puis indépendance des X_i avec N, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{X}_i=k,\mathrm{N}=j\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k,\mathrm{N}=j\right) = \sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\end{aligned}$$

On sait que $\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i \sim \mathscr{B}(j,p)$ d'où $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k\right)=0$ si $j<k$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= \sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\mathrm{X}_i=k\right)\mathbb{P}(\mathrm{N}=j)\\ &= \sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} = p^k(1-p)^{n-k}\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\binom{n}{j}p^j\end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell=j-k$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) &= p^k(1-p)^{n-k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{j+k}{k}\binom{n}{j+k}p^{\ell+k}\\ &= p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!}p^j = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}p^\ell\end{aligned}$$

On identifie alors un binôme et il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=\binom{n}{k}p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^{2k}\left[(1-p)(1+p)\right]^{n-k}$$

On conclut $\boxed{\text{Y suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p^2).}$

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

1. Montrer $\qquad \forall\varepsilon>0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

2. Établir
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell$$
avec ℓ un réel à préciser.

3. En déduire $\qquad \forall\varepsilon>0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}+\frac{\varepsilon_k}{n}\right)-\ell\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Corrigé : 1. Les ε_k sont finies donc dans L^2. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\mathbb{E}(\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right))=0$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, il vient pour $\varepsilon>0$ par indépendance des ε_k

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{E}(\sin^2\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right))\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}n\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(1)$$

On conclut $\boxed{\forall\varepsilon>0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$

2. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x) - x| \leqslant x^2$$

d'où $$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right]\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4} \leqslant \frac{1}{2n}$$

Ainsi $$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2} + \frac{\varepsilon_k}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

d'où, pour $\varepsilon > 0$

$$\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2} + \frac{\varepsilon_k}{n}\right) - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{n}\right)\cos\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

D'après les résultats des questions précédentes, on conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2} + \frac{\varepsilon_k}{n}\right) - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 10 (**)

Une urne contient n billes numérotées de 1 à n. On saisit une poignée de billes et on note X la somme des numéros des billes. En supposant que toutes les poignées sont équiprobables, que vaut $\mathbb{E}(\mathrm{X})$?

Corrigé : Soit $\mathrm{U} \sim \mathscr{U}_{\mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])}$ et $\mathrm{X} = \sum_{x\in\mathrm{U}} x$. On peut écrire

$$\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{1}_{k\in\mathrm{U}}$$

Par suite $$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(k \in \mathrm{U})$$

et $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(k \in \mathrm{U}) = \frac{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{k\})}{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}}$$

Variante : On peut aussi considérer $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ des variables i.i.d de loi $\mathscr{B}(1/2)$ avec le formalisme suivant : X_i vaut 1 si i pioché et 0 sinon. On a

$$\mathrm{U} = \{i \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \mathrm{X}_i = 1\} \sim \mathscr{U}_{\mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])}$$

puisque $$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!]) \qquad \mathbb{P}(\mathrm{U} = \mathrm{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{A}}\{\mathrm{X}_i = 1\} \cap \bigcap_{i\in\bar{\mathrm{A}}}\{\mathrm{X}_i = 0\}\right) = \frac{1}{2^n}$$

Puis $$\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{X}_k$$

et on retrouve $$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{n(n+1)}{4}$$