ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°62

Exercice 1 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Pour X variable aléatoire avec $\mathrm{X}(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\mathrm{X}}\right)$$

On définit également $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer une expression de $\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$ sous forme de produit pour tout n entier non nul et t réel.
2. Pour n entier non nul et t réel, en considérant $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$, déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{\mathrm{X}_n})_{n\geqslant 1}$.
3. Étudier la continuité de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{\mathrm{X}_n}$.
4. Justifier que X_n et $-\mathrm{X}_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) \end{cases}$$

6. La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément ?

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 1$ et t réel. Par indépendance puis transfert, on trouve

$$\Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\frac{\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\frac{\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{t}{2^k}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2^k}}}{2}\right)$$

D'où $\qquad \boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)}$

2. Soit n entier non nul et t réel. Avec la relation de trigonométrie $\sin(\theta)\cos(\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$, on obtient

$$\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{X}_{n-1}}(t)\sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique et par conséquent

$$\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\Phi_{\mathrm{X}_1}(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n}$$

Pour $t \notin 2^n\pi\mathbb{Z}$, il vient $$\Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin(t)}{t}$$

Le calcul de $\Phi_{\mathrm{X}_n}(0)$ est immédiat et si $t \neq 0$, on a $t \notin 2^n\pi\mathbb{Z}$ pour n assez grand d'où

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Phi_{\mathrm{X}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{sinc}(t)}$$

3. La fonction sinc est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Puis $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ d'où $\operatorname{sinc} x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = \operatorname{sinc} 0$ donc

$$\boxed{\text{La fonction sinc est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On peut aussi citer le développement en série entière $\operatorname{sinc} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ pour tout x réel ce qui prouve le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de sinc.

4. Soit $n \geqslant 1$ et $x \in \mathrm{X}_n(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) &= \sum_{(\alpha_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}\in\{-1,1\}^n \;\mid\; \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k}=x} \mathbb{P}(\varepsilon_1 = \alpha_1, \ldots, \varepsilon_n = \alpha_n) \\
&= \sum_{(\alpha_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}\in\{-1,1\}^n \;\mid\; \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k}=x} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\varepsilon_k = \alpha_k) \\
\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) &= \sum_{(\alpha_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}\in\{-1,1\}^n \;\mid\; \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k}=x} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(-\varepsilon_k = \alpha_k) = \mathbb{P}(-\mathrm{X}_n = x)
\end{aligned}$$

d'après l'indépendance des ε_k et l'égalité en loi de ε_k et $-\varepsilon_k$ pour tout $k \geqslant 1$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1, \text{ les variables } \mathrm{X}_n \text{ et } -\mathrm{X}_n \text{ ont même loi.}}$$

Variante : Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, il vient par indépendances des ε_k

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n}(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n t^{\varepsilon_k/2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(t^{\varepsilon_k/2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(t^{-\varepsilon_k/2^k}\right) = \ldots = \mathrm{G}_{-\mathrm{X}_n}(t)$$

5. Avec l'identité d'Euler puis l'égalité en loi précédemment obtenue, il vient

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) &= \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\mathrm{X}_n} + \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t\mathrm{X}_n}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\mathrm{X}_n}\right) + \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\mathrm{X}_n}\right)\right] = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t\mathrm{X}_n}\right) = \Phi_{\mathrm{X}_n}(t)
\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}\left(\cos(t\mathrm{X}_n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{sinc}(t)}$$

Variante : On peut aussi observer pour t réel

$$\Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \operatorname{Re}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\mathrm{X}_n t}\right) = \mathbb{E}\left(\operatorname{Re}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\mathrm{X}_n t}\right) = \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n))$$

6. On pose $t_n = 2^n\pi$ pour n entier. On a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \varphi_n(t_n) = \prod_{k=1}^n \cos\left(2^{n-k}\pi\right) = \cos(\pi) = -1$$

Par suite $$\forall n \geqslant 1 \qquad |\varphi_n(t_n) - \operatorname{sinc}(t_n)| = 1 + \frac{\sin(t_n)}{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi $$\boxed{\text{La suite } (\varphi_n)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas uniformément vers sinc.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}$$

puis préciser le cas d'égalité.

Corrigé : Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2$. Avec le système complet $\{\mathrm{B}, \bar{\mathrm{B}}\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) &= \left[\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\right] \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \left[\mathbb{P}(\mathrm{B}) - 1\right] + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) \\
\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) &= \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})
\end{aligned}$$

D'où $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) \leqslant \mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) = (1 - \mathbb{P}(\mathrm{B}))\mathbb{P}(\mathrm{B}) \leqslant \dfrac{1}{4}$

et $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geqslant -\mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geqslant -\mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{B}) = -(1 - \mathbb{P}(\mathrm{B}))\mathbb{P}(\mathrm{B}) \geqslant -\dfrac{1}{4}$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \qquad |\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}}$

L'inégalité est une égalité si $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})$ et $\mathbb{P}(\bar{\mathrm{B}})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ ou $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B})$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = 0$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$. Comme $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}})$, on conclut

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité si et seulement si } \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{2} \text{ ou } \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}.}$$

Remarque : Il s'agit de l'inégalité dite de *Kosmanek*.

Variante : Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}, \mathbb{1}_{\mathrm{B}})| \leqslant \sigma(\mathbb{1}_{\mathrm{A}})\sigma(\mathbb{1}_{\mathrm{B}})$$

Or, pour X variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{p(1-p)} \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après la relation de König-Huygens, il vient

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}, \mathbb{1}_{\mathrm{B}}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}\mathrm{B}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{B}}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$$

Le résultat suit. Si l'inégalité est une égalité, on a $\sigma(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}) = \sigma(\mathbb{1}_{\mathrm{B}}) = \dfrac{1}{4}$ d'où $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$. La réciproque est immédiate.

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire vérifiant $|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{M}$ presque sûrement avec $\mathrm{M} \geqslant 0$. On suppose qu'il existe $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que X et $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ aient même loi. Montrer que pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on a

$$\mathrm{X}_i \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad |\mathrm{X}_i| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.}$$

Corrigé : Supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{i_0} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}\right) < 1$. Puis

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{\mathrm{X}_i > \frac{\mathrm{M}}{n}\right\} \subset \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i > \mathrm{M}\right\}$$

D'où par croissance puis indépendance et égalité en loi des X_i

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i > \mathrm{M}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_i > \frac{\mathrm{M}}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{i_0} > \frac{\mathrm{M}}{n}\right)^n > 0$$

Par égalité en loi, on a $\mathbb{P}(|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{M}) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right| \leqslant \mathrm{M}\right) = 1$ puis

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{p.s.}$$

ce qui contredit $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i > \mathrm{M}\right) > 0$. On en déduit

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{X}_i \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.}$$

On procède à l'identique en considérant $-\mathrm{X}$ et $-\mathrm{X}_i$ et on conclut

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{X}_i \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad |\mathrm{X}_i| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} \quad \text{p.s.}}$$

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\sigma_n \sim \mathscr{U}_{\mathrm{S}_n}$. On note X_n le nombre de points fixes de σ_n.

Montrer $$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^{-1}$$

Corrigé : Notons $\mathrm{D}_{n,k}$ le nombre de permutations de S_n avec k points fixes. La famille $(\{\mathrm{X}_n = k\})_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est un système complet d'événements d'où

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k)$$

Comme σ_n suit la loi uniforme sur S_n, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{\mathrm{D}_{n,k}}{n!}$$

Or, choisir une permutation de S_n à k points fixes équivaut à choisir k points fixes puis à choisir une permutation sans point fixe (un *dérangement*) sur les $n - k$ points restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir les points fixes, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{D}_{n,k} = \binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k,0}$$

Ainsi $$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{\binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k,0}}{n!} = \frac{1}{k!} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-k} = 0)$$

D'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-k} = 0)$$

Les séries entières $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \mathbb{P}(X_n = 0) z^n$ ont des rayons supérieurs à 1 d'où, par produit de Cauchy de séries entières

$$\forall z \in D(0,1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) z^n\right)$$

d'où $$\forall z \in D(0,1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) z^n = \frac{e^{-z}}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)$$

À nouveau par théorème du produit de Cauchy et unicité du développement en série entière, on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ainsi $$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}}$$

Variante : On peut utiliser la formule du crible (hors-programme donc à retrouver et à redémontrer). On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$$

Par suite, on a

$$\mathbb{P}(X_n \neq 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\sigma_n(k) = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(\sigma_n(i_1) = i_1, \ldots, \sigma_n(i_k) = i_k)$$

Comme σ_n suit la loi uniforme sur S_n, on a

$$\mathbb{P}(X_n \neq 0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

Ainsi $$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n \neq 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 5 (***)

Peut-on truquer deux dés à six faces de sorte que la somme des points soit équirépartie sur $[\![2\,;\,12]\!]$?

Corrigé : Soient X et Y les résultats des lancers de chaque dé. Les variables aléatoires X, Y à valeurs dans $[\![1\,;\,6]\!]$ sont indépendantes. Supposons que $X + Y \sim \mathscr{U}_{[\![2\,;\,12]\!]}$. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad G_X(t) = \sum_{k=1}^{6} a_k t^k \qquad G_Y(t) = \sum_{k=1}^{6} b_k t^k \qquad G_{X+Y}(t) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k$$

avec $a_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $b_k = \mathbb{P}(Y = k)$ pour tout $k \in [\![1\,;\,6]\!]$. Par indépendance de X et Y, on obtient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

c'est-à-dire $$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \left(\sum_{k=1}^{6} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=1}^{6} b_k t^k\right) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k$$

Après factorisation $\quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad t^2 \left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1} t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1} t^k\right) = \dfrac{t^2}{11}\sum_{k=0}^{10} t^k$

Notant T une indéterminée, on a

$$\mathrm{T}^2 \left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1} \mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1} \mathrm{T}^k\right) = \frac{\mathrm{T}^2}{11}\sum_{k=0}^{10} \mathrm{T}^k$$

puisque la différence des deux polynômes admet une infinité de racines. Par suite

$$\left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1} \mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1} \mathrm{T}^k\right) = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} \mathrm{T}^k$$

et $\qquad (\mathrm{T}-1)\left(\sum_{k=0}^{10} \mathrm{T}^k\right) = \mathrm{T}^{11} - 1 = \prod_{k=0}^{10}\left(\mathrm{T} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{11}}\right) = (\mathrm{T}-1)\prod_{k=1}^{10}\left(\mathrm{T} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{11}}\right)$

d'où $\qquad \left(\sum_{k=0}^{5} a_{k+1} \mathrm{T}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} b_{k+1} \mathrm{T}^k\right) = \dfrac{1}{11}\prod_{k=1}^{10}\left(\mathrm{T} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{11}}\right)$

Il suffit alors d'observer $a_6 b_6 = \dfrac{1}{11} \neq 0$ pour conclure puisque les polynômes intervenant dans le produit à gauche sont de degré 5 donc admettent chacune une racine réelle tandis que le membre de droite n'en admet aucune. Ainsi

$$\boxed{\text{On ne peut piper deux dés pour que leur somme suive une loi uniforme sur } [\![\, 2\,;\,12 \,]\!].}$$

Exercice 6 (***)

Soit $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $q = 1 - p$. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \qquad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n - np}{\sqrt{npq}}$$

1. Donner la loi et la fonction génératrice de S_n.
2. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$, $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$ pour $x > 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. La variable aléatoire S_n est somme de n variables indépendantes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n,p) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (pt + 1 - p)^n}$$

2. Soit n entier non nul. On a par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i - p) = 0$$

Puis, par indépendance des X_i, il vient

$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{npq}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{nqp}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) = \frac{npq}{npq}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = 1}$

Remarque : La variable aléatoire T_n est dite *centrée réduite*.

3. Soit $x > 0$. Par indépendance des X_i, on trouve

$$\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) = \mathbb{E}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{npq}}\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - p)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} x^{\frac{\mathrm{X}_i - p}{\sqrt{npq}}}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(x^{\frac{\mathrm{X}_i - p}{\sqrt{npq}}}\right)$$

Puis par transfert, on obtient

$$\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) = \left(px^{\sqrt{\frac{q}{np}}} + qx^{-\sqrt{\frac{p}{nq}}}\right)^n = \left[p\exp\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\ln(x)\right) + q\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\ln(x)\right)\right]^n$$

Avec un développement limité à l'ordre deux, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) &= \left[p\left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}}\ln(x) + \frac{q}{2np}\ln(x)^2\right) + q\left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}}\ln(x) + \frac{p}{2nq}\ln(x)^2\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \\ &= \left[\frac{p+q}{2n}\ln(x)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = \exp\left[n\ln\left(1 + \frac{\ln(x)^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln(x)^2}{2} + \mathrm{o}(1)\right]\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)^2}{2}}}$

Remarque : Ce résultat est une conséquence du *théorème de la limite centrée* ou de son corollaire qu'est le théorème de Moivre-Laplace.

Exercice 7 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$. On pose $\mathrm{T}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(2\mathrm{X}_i - 1)$ pour $n \geqslant 1$.

1. Rappeler la propriété de continuité décroissante pour une suite d'événements.
2. Montrer $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}(n^4\mathrm{T}_n^4) = 3n^2 - 2n$
3. Montrer $\qquad \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$ p.s.

Corrigé : 1. Étant donnée $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite décroissante d'événements, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\right)}$$

2. On note $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{Y}_n = 2\mathrm{X}_n - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i$

Posons $\qquad \mathscr{P}(n) : \qquad \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2 - 2n$

L'initialisation $\mathscr{P}(1)$ est immédiate. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 1$ fixé. On a

$$\mathbb{E}\left((\mathrm{S}_n + \mathrm{Y}_{n+1})^4\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{S}_n^4 + 4\mathrm{S}_n^3\mathrm{Y}_{n+1} + 6\mathrm{S}_n^2\mathrm{Y}_{n+1}^2 + 4\mathrm{S}_n\mathrm{Y}_{n+1}^3 + \mathrm{Y}_{n+1}^4\right)$$

Par linéarité de l'espérance et indépendance de S_n et Y_{n+1}, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) + 4\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^3)\underbrace{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n+1})}_{=0} + 6\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2)\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n+1}^2) + 4\underbrace{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)}_{=0}\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n+1}^3) + \mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n+1}^4)$$

Puis $\qquad \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)^2 = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n+1}^4) = 1$

Ainsi $$\mathbb{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = 3n^2 - 2n + 6n + 1 = 3(n+1)^2 - 2(n+1)$$

On conclut $$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}(n^4\mathrm{T}_n^4) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2 - 2n}$$

3. La variable aléatoire $\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^4$ est positive et d'après l'inégalité de Markov

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^4 \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^4 \leqslant \sqrt{n} \times \frac{3n^2}{n^4} = \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$$

On pose $$\forall k \geqslant 1 \qquad \mathrm{Z}_k = \left\{\left(\frac{\mathrm{S}_k}{k}\right)^4 \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

La suite $\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n} \mathrm{Z}_k\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante d'où par continuité décroissante

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{Z}_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{Z}_k\right)$$

Puis, par sous-additivité $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{Z}_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_k)$$

D'après le résultat de la question précédente, il s'agit du reste d'une série convergente et on conclut

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{Z}_k\right) = 0$$

c'est-à-dire $$\exists n \in \mathrm{N} \quad | \quad \forall k \geqslant n \qquad \left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^4 < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{p.s.}$$

Par suite $$\frac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Et finalement $$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{p.s.}}$$

Exercice 8 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier. On appelle *marche aléatoire* la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Pour $n \geqslant 1$, préciser $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i(\Omega)$ et la loi du n-uplet $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Déterminer une expression sous forme de somme pour
$$\mathrm{T}_n(f) = \mathbb{E}(f(\mathrm{S}_n))$$
3. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en déduire la relation de récurrence
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{T}_n(f) = \mathrm{T}_{n-1}(g) \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$

4. Établir la monotonie de la suite $(\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|))_{n\geqslant 1}$.
5. Comparer les suites $(\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|))_{n\geqslant 1}$ et $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$.
6. Déterminer la loi de S_n pour n entier non nul.
7. Montrer que la marche aléatoire repasse une infinité de fois presque sûrement par zéro.

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 1$. On a $$\boxed{\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i(\Omega) = \{-1,1\}^n}$$

On remarque $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)(\Omega) \subset \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i(\Omega)$ et pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \{-1,1\}^n$, il vient par indépendance

$$\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) = (x_1,\ldots,x_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i) = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi $$\boxed{(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) \sim \mathscr{U}_{\{-1,1\}^n}}$$

2. Soit $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{T}_n(f) = \mathbb{E}(f(\mathrm{S}_n)) = \mathbb{E}\left(f\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k\right)\right)$$

Par transfert, on obtient

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{T}_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{-1,1\}^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

3. Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(f) &= \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{-1,1\}^n} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\{-1,1\}^{n-1}} \frac{1}{2}\left[f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + 1\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - 1\right)\right]\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{T}_n(f) = \mathrm{T}_{n-1}(g)}$$

4. Soit $n \geqslant 1$. On choisit $f = |\cdot|$. On a

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{n+1}|) = \mathbb{E}(g(\mathrm{S}_n))$$

Pour x réel, il vient par inégalité triangulaire

$$|x| = \frac{1}{2}\,|x+1+x-1| \leqslant g(x)$$

Par croissance de l'espérance, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{S}_{n+1}|) \geqslant \mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)}$$

5. Soit $n \geqslant 1$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou la positivité de $\mathbb{V}(|\mathrm{S}_n|)$, on obtient

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)^2 \leqslant \mathbb{E}((\mathrm{S}_n)^2) = \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = n$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|) \leqslant \sqrt{n}}$$

6. La suite $\left(\dfrac{\mathrm{X}_i+1}{2}\right)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$. Ainsi, on a $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\mathrm{X}_i+1}{2}\right) \sim \mathscr{B}(n,1/2)$ puis

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i+1}{2}\right)=k\right)=\mathbb{P}(S_n=2k-n)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

Ainsi $$\boxed{\forall \ell \in [\![-n\,;\,n]\!] \qquad \mathbb{P}(S_n=\ell)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{\ell+n}{2}} & \text{si } \ell+n\in 2\mathbb{N}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

Remarque : Le calcul précédent dit plus précisément que $S_n(\Omega)=\{2k-n, k\in [\![0\,;\,n]\!]\}$.

7. On pose $S_0=0$. L'événement « la marche aléatoire passe un nombre fini de fois par zéro » s'écrit

$$A=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\{S_{2n}=0\}\cap\bigcap_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=2n+1}^{2n+k}X_i\neq 0\right\}$$

autrement dit, la marche aléatoire passe une dernière fois en zéro à l'instant $2n$ pour un certain n entier puis n'y repasse plus. Par incompatibilité et indépendance de S_{2n} avec $X_{2n+1}, X_{2n+2}, \ldots$, il vient

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_{2n}=0)\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=2n+1}^{2n+k}X_i\neq 0\right\}\right)$$

On a égalité en loi pour toutes familles finies extraites de $(X_i)_{i\geqslant 2n+1}$ et $(X_i)_{i\geqslant 1}$. Par suite, avec la continuité décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=2n+1}^{2n+k}X_i\neq 0\right\}\right)&=\lim_{K\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{K}\left\{\sum_{i=2n+1}^{2n+k}X_i\neq 0\right\}\right)\\&=\lim_{K\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{K}\left\{\sum_{i=1}^{k}X_i\neq 0\right\}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}X_i\neq 0\right\}\right)\end{aligned}$$

qui est donc une quantité indépendante de n et qu'on peut noter α. Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_{2n}=0)\alpha$$

Par ailleurs $$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(S_{2n}=0)=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Pour que la somme définissant $\mathbb{P}(A)$ soit convergente, on a donc nécessairement $\alpha=0$ et par conséquent $\mathbb{P}(A)=0$ et on conclut

$$\boxed{\text{La marche aléatoire repasse une infinité de fois par zéro presque sûrement.}}$$