Étude des masses : la cinétique

Cours

v1.1

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

Introduction

Depuis le début de l'année nous avons commencé l'étude de la mécanique du solide par la cinématique du solide puis par la statique des solides.

- la cinématique est l'étude et la caractérisation des mouvements d'un solide,
- la statique correspond à l'étude de l'équilibre statique (sans mouvement) d'un solide soumis à des actions mécaniques extérieures.

Remarque

Ces deux études se sont appuyées sur la modélisation du mécanisme (liaisons). La forme, les caractéristiques géométriques des solides ne sont pas entrés en jeu.

Nous allons glisser vers la dynamique du solide, c'est à dire l'étude des relations entre les mouvements d'un solide et leurs causes, autrement dit, un carrefour entre la cinématique et la statique. Cependant cette étude du mouvement de ces solides nécessite de connaitre leur masse et inertie. Nous allons donc commencer par définir les notions de masse et d'inertie, c'est à dire les mouvements des solides en prenant en compte la masse : **la cinétique**.

Définition *Cinétique*

La cinétique est l'étude des caractéristiques d'inertie d'un solide.

0.1 Notions d'inertie - Cas de la translation

Commençons par une question rhétorique. Voici la situation : pour une raison obscure vous devez arrêter, l'un de ces sportifs, en faisant barrage. Les deux courent à la même vitesse v. Lequel de ces deux cas est le moins déplaisant d'un point de vue séquelles post-traumatiques ?

FIGURE 1 – Cas 1 : L'ex pilier du Stade Toulousain Charlie Faumuina, $1,85$ m, 130 kg.

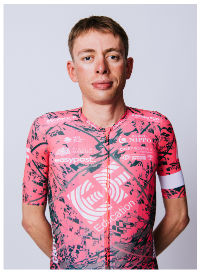


FIGURE 2 – Cas 2 : Le coureur cycliste britannique Hugh Carthy, $1,91$ m, 68 kg.

Par un raisonnement plus « ingénieur » nous savons, par expérience, qu'il est plus « difficile » d'accélérer un camion qu'une moto comme il est plus « difficile » de le freiner. **L'inertie** caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement.

Propriété

Pour un **mouvement de translation**, **la masse suffit** pour définir cette quantité, par contre pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de préciser la répartition de cette masse.

0.2 Notions d'inertie - Cas de la rotation

Prenons un cas simple : une épreuve de patinage. Vous avez tous déjà vu un patineur, ou une patineuse effectuer des tours sur lui ou elle même.

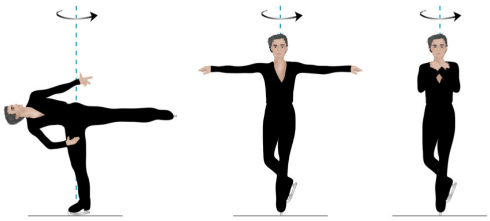


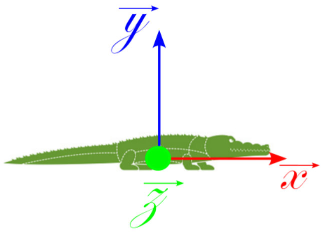
FIGURE 3 – Patineur en rotation sur lui même.

Dans ces 3 situations, comment évolue la vitesse de rotation ?

Prenons un autre cas simple :

FIGURE 4 – Crocodile embroché de part en part pour le faire tourner à la broche. *Disclaimer :* aucun animal n'a été blessé pour cette scène.

Dans cette situation, la masse du crocodile ne variant pas, quelle est à votre avis la manière d'embrocher ledit animal minimisant l'effort à fournir pour atteindre la vitesse de rotation ω constante ?



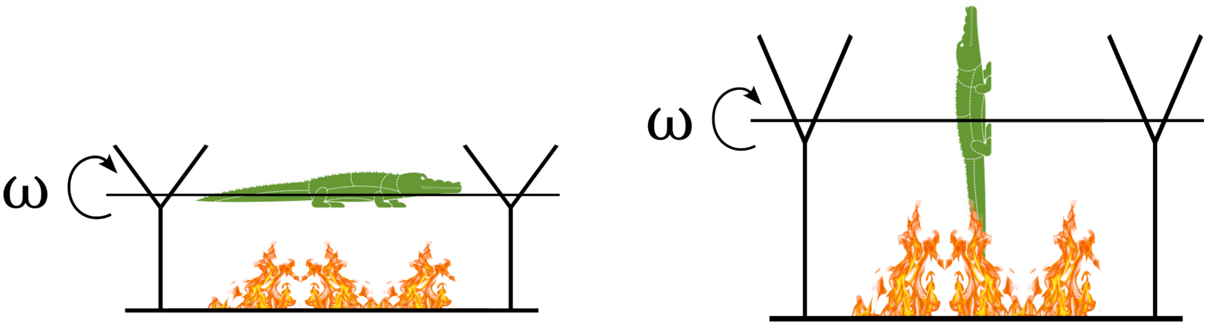


FIGURE 5 –
Cas 1 : broche selon $\vec{x}$
Cas 2 : broche selon $\vec{y}$

1 Masse

1.1 Définition et propriétés

La masse caractérise la quantité de matière, c'est une grandeur complètement additive, extensive.

Soit, Σ_1, Σ_2 deux systèmes matériels disjoints alors :

$$m\left(\Sigma_1 \cup \Sigma_2\right) = m\left(\Sigma_1\right) + m\left(\Sigma_2\right)$$

avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \phi$.

La masse m_Σ de l'ensemble Σ est définie par :

$$m_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}m = \int_\Sigma \rho(P)\mathrm{d}v$$

avec $\rho(P)$ masse volumique au point P et dv un élément de volume.

Remarque

- Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de **masse volumique** $\rho(P)$ au point P : $\mathrm{d}m = \rho(P)dv$;
- Si le système matériel est assimilable à une surface on parle de **masse surfacique** $\sigma(P)$ au point P : $\mathrm{d}m = \sigma(P)ds$;
- Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de **masse linéique** $\lambda(P)$ au point P : $\mathrm{d}m = \lambda(P)dl$.

1.2 Conservation de la masse

On admet en mécanique classique que la masse est une grandeur indépendante du temps, ainsi pour deux instants t_1 et t_2 quelconque :

$$m\left(\Sigma, t_1\right) = m\left(\Sigma, t_2\right)$$

On en déduit une relation importante :

$$\left[\frac{d}{dt}\int_{P\in\Sigma}\overrightarrow{f(P,t)}\mathrm{d}m\right]_R = \int_{P\in\Sigma}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{f(P,t)}\right]_R\ \mathrm{d}m.$$

qui permet d'inverser la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport à la masse.

1.3 Centre de masse, d'inertie et centre de gravité

On confond souvent le centre de gravité avec le centre de masse (ou centre d'inertie), cependant il y a une petite subtilité à connaître.

Le centre de masse (ou centre d'inertie) et le centre de gravité ne sont confondus que si le champ de pesanteur est uniforme dans l'espace d'étude ($\vec{g}$ sur une petite partie de la surface de la Terre par exemple, *soit dans tout nos cas d'étude de mécanique en SII*). Si le champ de pesanteur n'est pas uniforme, le centre de gravité dépend de la position et de l'orientation du solide.

1.3.1 Centre de masse (ou centre d'inertie)

Définition *Centre d'inertie*

Le centre de masse (ou centre d'inertie) d'un solide S est le point géométrique correspondant à la valeur moyenne de la distribution de masse du solide dans l'espace.

$$\int_S \vec{GP}\cdot \mathrm{d}m = \vec{0}$$

Qui se calcule aussi :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m$$

<u>Démonstration</u> :

Qui peut se réécrire de la manière suivante en prenant un point A quelconque :

$$\begin{aligned}
\int_S \overrightarrow{GP}\,\mathrm{d}m &= \vec{0}\\
\int_S \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m &= \vec{0}\\
\int_S \overrightarrow{GA}\,\mathrm{d}m + \int_S \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m &= \vec{0}\\
m\overrightarrow{GA} + \int_S \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m &= \overrightarrow{0} \quad (\text{car}\overrightarrow{GA}\ \text{ est constant})\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

avec : $\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A)\vec{x} + (y_G - y_A)\vec{y} + (z_G - z_A)\vec{z}$.

Si l'on prend le point O, origine spatiale de notre repère, on a alors :

$$\overrightarrow{OG} = x_G\vec{x} + y_G\vec{y} + z_G\vec{z} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m$$

avec : x_G, y_G et z_G les coordonnées du point G.

1.3.2 Centre de gravité

Définition *Centre de gravité*

Le centre de gravité $G_{\text{gravité}}$ est par définition le point pour lequel l'action de la gravité a un moment nul quelque soit son orientation dans l'espace.

$$\overrightarrow{M_{G_{\text{gravité}}(\vec{P})}} = \vec{0}$$

Dans le cas où le champ de gravité $\vec{g}$ est uniforme sur le solide S, on peut montrer que le centre de gravité et le centre de masse sont confondus : Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{G_{\text{gravité}}(\vec{P})}} &= \vec{0} \\
\int_S \overrightarrow{G_{\text{gravité}}P} \wedge \vec{g}\,\mathrm{d}m &= \vec{0} \\
\left(\int_S \overrightarrow{G_{\text{gravité}}P}dm\right) \wedge \vec{g} &= \vec{0} \quad \text{(car } \vec{g} \text{ est constant)} \\
\int_S \overrightarrow{G_{\text{gravité}}P}\mathrm{d}m &= \vec{0} \quad \text{(car } \vec{g} \neq \vec{0}\text{)}
\end{aligned}$$

1.3.3 Pour un ensemble de solides

Pour un système matériel constitué de n solides S_i de masse m_i et de centres de masse (d'inertie, ou de gravité) G_i :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{AG_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Le point G est ici le barycentre des différentes masses (*bary : implique une idée de gravité ou de pression atmosphérique*).

1.3.4 Théorèmes de Guldin

Théorème de Guldin - premier énoncé

Centre d'inertie d'une courbe plane
Soient (C) une courbe du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (C).

L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite (Δ) est égal au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie $2\pi \cdot r_G$.

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L$$

Démonstration :

On associe à la courbe (C) une masse linéïque λ constante, $\mathrm{d}m = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$.

La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \mathrm{d}m$$

ici cette relation devient :

$$\lambda \cdot L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} \cdot \lambda \cdot \mathrm{d}l.$$

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant $\vec{r}$:

$$L \cdot \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP}\ \mathrm{d}l \Rightarrow L \cdot r_G = \int_C r\ \mathrm{d}l$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot \mathrm{d}l = 2\pi \int_C r \cdot \mathrm{d}l$$

En substituant $\int_C r \cdot \mathrm{d}l = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Théorème de Guldin - second énoncé

Centre d'inertie d'une surface plane homogène
Soient (S) une surface du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (S).

Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$$

Démonstration :

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique $\mathrm{d}m = \sigma \cdot ds$ constante et $m_S = \sigma \cdot S$.

Par définition :

$$m_S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} \cdot \mathrm{d}m \Rightarrow S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} \cdot ds$$

soit en projection suivant $\vec{r}$

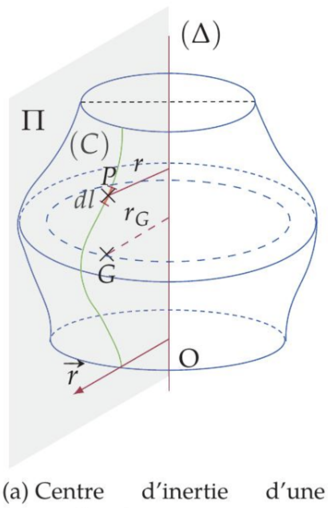
$$S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

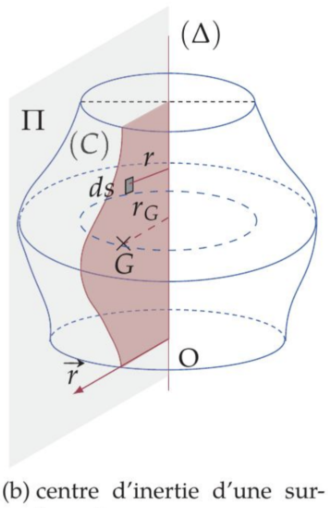
$$V = \int_v r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S.$$



(a) Centre d'inertie d'une courbe plane



(b) centre d'inertie d'une surface plane

FIGURE 6 – Illustration des deux énoncés du Théorème de Guldin

Remarque

L'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

2 Inertie & Moments d'inertie

Nous l'avons dit : la masse ne suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation ou un mouvement plus complexe, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide. Les moments et produits d'inertie caractérisent cette répartition.

2.1 Moments d'inertie

2.1.1 Moment d'inertie par rapport à un point

Définition *Moment d'inertie % à un point*

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à un point A la quantité positive :

$$I_A(S) = \int_S \overrightarrow{AP}^2 \, \mathrm{d}m \quad [\mathrm{kgm}^2]$$

2.1.2 Moment d'inertie par rapport à une droite

Définition *Moment d'inertie % à une droite*

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à une droite (Δ) la quantité positive

$$I_\Delta(S) = \int_S (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP})^2 \, \mathrm{d}m \quad [\mathrm{kgm}^2]$$

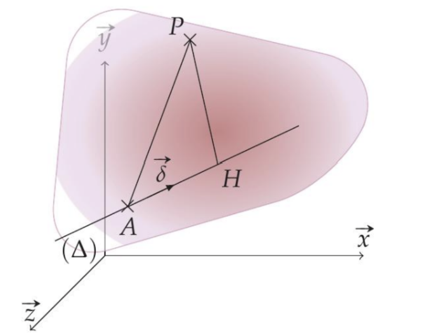


FIGURE 7 – Moment d'inertie par rapport à une droite

En faisant intervenir le point H, projection de P sur la droite (Δ) on déduit :

$$I_\Delta(S) = \int_S \overrightarrow{HP}^2 \ \mathrm{d}m = \int_S d_P^2 \cdot \mathrm{d}m$$

avec d_P distance du point P à la droite (Δ).

Le moment d'inertie par rapport à une droite est le même en tout point de la droite.

2.1.3 Rayon de giration

Le moment d'inertie étant homogène au produit d'une masse par une distance au carré, il est toujours possible d'écrire le moment d'inertie autour d'un axe d'un solide quelconque sous la forme :

$$I = M \cdot R_g^2$$

avec M la masse du solide et R_g le rayon de giration.

Le rayon de giration précise la répartition des masses autour de l'axe considéré.

2.1.4 Moments d'inertie dans un repère cartésien

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un point P de coordonnées x, y, z dans R.

- Le moment d'inertie du solide S par rapport au point O dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} I_O(S) &= \int_S \overrightarrow{OP}^2 \ \mathrm{d}m \text{ soit} \\ &= \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m \end{aligned}$$

- Le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ s'écrit :

$$I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP})^2 \ \mathrm{d}m = \int_S (\vec{x} \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}))^2 \cdot \mathrm{d}m$$
$$I_{(O,\vec{x})}(S) = \int_S \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mathrm{d}m$$

Finalement on peut écrire :

- $I_{(O,\vec{x})} = \int_S \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O, \vec{x})$;
- $I_{(O,\vec{y})} = \int_S \left(z^2 + x^2\right) \cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O, \vec{y})$;
- $I_{(O,\vec{z})} = \int_S \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport à $(O, \vec{z})$.

Remarque

On peut également définir (moins utilisés) :

- $I_{(O\vec{x}\vec{y})} = \int_S z^2 \cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$;
- $I_{(O\vec{y}\vec{z})} = \int_S x^2 \cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$;

- $I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \int_S y^2 \cdot \mathrm{d}m$, moment d'inertie du solide par rapport au plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$.

2.2 Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent la présence ou l'absence de symétries dans le solide. Ils seront bien mieux définis lors de l'écriture sous forme matricielle de l'opérateur d'inertie à la section suivante.

2.3 Relations entre les moments d'inertie

De simples sommes suffisent à montrer les relations suivantes :

- $I_O = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \frac{1}{2}\left(I_{(O,\vec{x})} + I_{(O,\vec{y})} + I_{(O,\vec{z})}\right)$
- $I_{(O,\vec{x})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})}$
- $I_{(O,\vec{y})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$
- $I_{(O,\vec{z})} = I_{(O\vec{z}\vec{x})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$

2.4 Théorème de Huygens

Théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $(A, \vec{\delta})$ est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{\delta})$, parallèle et passant par le centre d'inertie du solide, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance séparant les deux axes.

$$I_{(A,\vec{\delta})} = I_{(G,\vec{\delta})} + m \cdot d^2$$

Remarque

Le corollaire : De tous les axes parallèles à une direction donnée, celui par rapport auquel le moment d'inertie est minimum est l'axe passant par G.

3 Opérateur d'inertie

3.0.1 Opérateur d'inertie en un point

L'opérateur d'inertie synthétise l'ensemble des caractéristiques d'inertie du solide. Cet opérateur est une fonction linéaire et peut être représenté par une matrice que nous allons définir dans cette section.

Définition *Opérateur d'inertie*

On appelle opérateur d'inertie $\overline{\overline{I_O(S)}}$ au point O d'un solide S l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace associe le vecteur

$$\overline{\overline{I_O(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} (\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}))\mathrm{d}m$$

Soient :

- $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère où $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base
- P, un point du solide S, avec $\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$
- $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}$, un vecteur.

Démonstration : Calculons $\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) = \\
&= (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \wedge ((\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}) \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z})) \\
&= \left(+\alpha \cdot \left(y^2 + z^2\right) - \beta \cdot x \cdot y \quad - \gamma \cdot x \cdot z \quad \right) \vec{x} \\
&+ \left(-\alpha \cdot x \cdot y - \beta \cdot \left(x^2 + z^2\right) - \gamma \cdot y \cdot z\right) \vec{y} \\
&+ \left(-\alpha \cdot x \cdot z - \beta \cdot y \cdot z + \gamma \cdot \left(x^2 + y^2\right)\right) \vec{z}
\end{aligned}$$

En intégrant sur le solide S :

$$\begin{aligned}
&\int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) \cdot \mathrm{d}m = \\
&\left(+\alpha \cdot \int_{P \in S} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mathrm{d}m \quad - \beta \cdot \int_{P \in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m \quad - \gamma \cdot \int_{P \in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m \quad \vec{x}\right. \\
&+ \left(-\alpha \cdot \int_{P \in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m \quad + \beta \cdot \int_{P \in S} \left(z^2 + x^2\right) \cdot \mathrm{d}m - \gamma \cdot \int_{P \in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m \quad \right) \vec{y} \\
&+ \left(-\alpha \cdot \int_{P \in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m \quad - \beta \cdot \int_{P \in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m \quad + \gamma \cdot \int_{P \in S} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mathrm{d}m\right) \vec{z}
\end{aligned}$$

On peut mettre ce résultat sous la forme du produit d'une matrice et du vecteur $\vec{u}$, ce qui donne le résultat attendu :

Après quelques calculs vous devriez être arrivés à ceci :

$$\overline{\overline{I_O(S)}} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} +\int_{P \in S} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mathrm{d}m & -\int_{P \in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m & -\int_{P \in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m \\ -\int_{P \in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m & +\int_{P \in S} \left(z^2 + x^2\right) \cdot \mathrm{d}m & -\int_{P \in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m \\ -\int_{P \in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m & -\int_{P \in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m & +\int_{P \in S} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Propriété

Cette matrice est caractéristique de la répartition de la matière d'un solide autour d'un point (ici O) et dans une base donnée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On peut pour chaque solide définir une matrice d'inertie.

À retenir

Par convention, on pose

$$\overline{\overline{I_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{ou } \overline{\overline{I_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{(O,\vec{x})} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{(O,\vec{y})} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{(O,\vec{z})} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On reconnaît sur la diagonale de la matrice :

- $A = I_{(O,\vec{x})} = \int_{P\in S} \left(y^2+z^2\right)\cdot \mathrm{d}m$, le moment d′ inertie du solide S autour de l'axe $(O,\vec{x})$
- $B = I_{(O,\vec{y})} = \int_{P\in S} \left(z^2+x^2\right)\cdot \mathrm{d}m$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O,\vec{y})$
- $C = I_{(O,\vec{z})} = \int_{P\in S} \left(x^2+y^2\right)\cdot \mathrm{d}m$, le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O,\vec{z})$

Et c'est ainsi que l'on peut définir simplement les *produits d'inertie* :

- $F = P_{xy} = \int_{P\in S} x\cdot y\cdot \mathrm{d}m$, le produit d'inertie par rapport plan $(O,\vec{x},\vec{y})$
- $E = P_{xz} = \int_{P\in S} x\cdot z\cdot \mathrm{d}m$, le produit d'inertie par rapport plan $(O,\vec{x},\vec{z})$
- $D = P_{yz} = \int_{P\in S} y\cdot z\cdot \mathrm{d}m$, le produit d'inertie par rapport plan $(O,\vec{y},\vec{z})$

Remarque

- Une matrice d'inertie **dépend de la base et du point de calcul**, il est donc important de préciser ces données
- La matrice d'inertie est une matrice symétrique
- On nomme aussi cette matrice tenseur d'inertie

Á retenir !

Nous avons vu précédemment que l'opérateur d'inertie était défini par :

$$\vec{u} \mapsto \overline{\overline{I}}_{(A,S)}.\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\mathrm{d}m$$

$\overline{\overline{I}}_A(S)$ est linéaire et est donc représentable dans une base b par une matrice. On peut démontrer rapidement que cette matrice est symétrique. On pose alors par définition :

$$\overline{\overline{I}}_{(A,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_S xy\mathrm{d}m & -\int_S xz\mathrm{d}m \\ -\int_S xy\mathrm{d}m & \int_S (x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_S yz\mathrm{d}m \\ -\int_S xz\mathrm{d}m & -\int_S yz\mathrm{d}m & \int_S (x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

L'opérateur d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'un solide S. On peut voir cet opérateur comme une description de la répartition des masses dans le solide.

On peut calculer les différents termes de la matrice par les expressions suivantes, en posant :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Moments d'inertie (kg · m²)	**Produits d'inertie (kg · m²)**
$A = \int_S (y^2+z^2)\mathrm{d}m$	$D = \int_S yz\mathrm{d}m$
$B = \int_S (x^2+z^2)\mathrm{d}m$	$E = \int_S xz\mathrm{d}m$
$C = \int_S (x^2+y^2)\mathrm{d}m$	$F = \int_S xy\mathrm{d}m$

3.1 Moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe Δ

Le moment d'inertie I_Δ d'un solide S par rapport à un axe Δ est (avec Δ passant par $(O,\vec{u})$) :

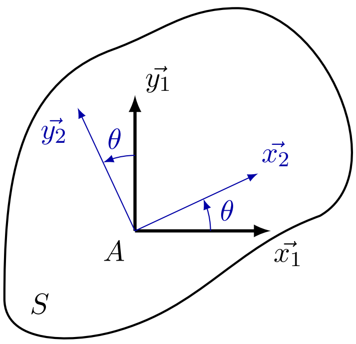
$$I_\Delta = \vec{u} \cdot \left(\overline{\overline{I}}_{(O,S)} \cdot \vec{u}\right)$$

Attention

Le produit matriciel $\overline{\overline{I}}_{(O,S)} \cdot \vec{u}$ n'a de sens que si $\overline{\overline{I}}_O(S)$ et $\vec{u}$ sont exprimés *dans la même base.*

3.2 Changement de bases d'une matrice d'inertie

Parfois, même si ceci est **très fortement déconseillé**, il est possible de procéder à un changement de bases de la matrice d'inertie pour calculer le moment cinétique. En effet, on souhaite parfois un résultat dans une base particulière (différente de celle d'expression de la matrice d'inertie).



On définit alors une matrice de changement de base $P_{b_0 \to b_1}$ qui permet de passer de la base b_0 vers la base b_1. Cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base b_1 écrits dans la base d'origine b_0.
Dans ce cas, la matrice d'inertie dans la base b_1 s'écrit :

$$\overline{\overline{I}}_{(A,S,b_1)} = P^{-1}_{b_0 \to b_1} \cdot \overline{\overline{I}}_{(A,S,b_0)} \cdot P_{b_0 \to b_1}$$

Remarque

Dans le cas de la figure ci-dessus (cas d'une simple rotation), la matrice de passage est :

$$P_{b_0 \to b_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } P^{-1}_{b_0 \to b_1} = P^t_{b_0 \to b_1}$$

3.3 Base propre d'inertie

Définition *Base propre d'inertie*

Pour tout solide, il existe une base propre d'inertie $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, c'est-à-dire une base dans laquelle la *matrice d'inertie* en G (centre de gravité) est *diagonale.*

Remarque

En fait vous l'avez déjà démontré : c'est une conséquence du *Théorème spectral* : toute matrice symétrique, réelle est diagonalisable.

Si $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base propre d'inertie pour un solide S, les axes $(G, \vec{x})$, $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ sont des axes principaux (ou axes propres) d'inertie.

Remarque

- Pour tous les solides présentant des symétries dans la répartition des masses, il est facile de déterminer les axes principaux en s'appuyant sur ces symétries.
- Si le point d'écriture est le centre d'inertie, on parle alors de base centrale et de moments centraux d'inertie.
- Les moments d'inertie sont minimum en G et leurs valeurs sont celles de moments centraux d'inertie.

En pratique, un *mouvement de rotation* autour d'un de ces axes se fait sans aucune vibration, ni balourd. On dit que le solide est *dynamiquement équilibré*. Un solide dynamiquement équilibré est statiquement équilibré, le contraire n'est pas toujours vrai ! (solide statiquement équilibré : le centre de gravité est sur l'axe de rotation). Nous reviendrons sur ces notions d'ici peu.

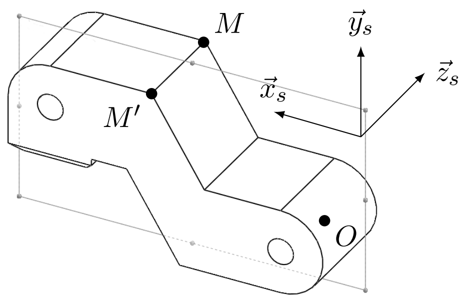
3.4 Propriétés des matrices d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à un axe est une *quantité positive* ou au pire considérée négligeable (pour des solides infiniment fins selon une direction).

Un moment d'inertie par rapport à un axe est *minimum* si cet axe passe *par le centre d'inertie du solide*. On ne peut par contre rien dire concernant les produits d'inertie par rapport à des plans.

Lorsque le solide possède un élément de symétrie, la matrice d'inertie peut se simplifier.

3.4.1 Le solide S possède un plan de symétrie



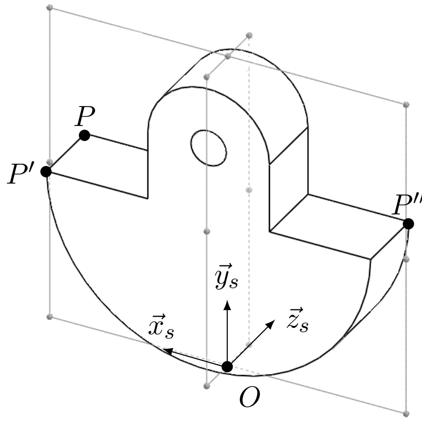
Si $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ est un plan de symétrie pour le solide S, alors en associant deux à deux des points symétriques M et M' de coordonnées (x, y, z) et $(x, y, -z)$ pour calculer les produits d'inertie en O, on montre que :

$$\int_S xz\mathrm{dm} = \int_S yz\mathrm{dm} = 0 \quad \text{car} \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z\mathrm{d}z = 0$$

Le solide S a alors pour matrice d'inertie au point O :

$$\overline{\overline{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$$

3.4.2 Le solide S possède une symétrie par rapport à deux plans sécants perpendiculaires



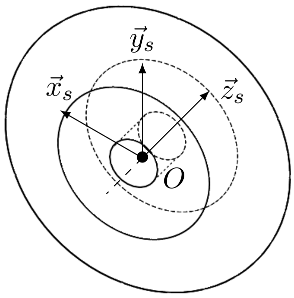
Les produits d'inertie sont tous nuls ($D = 0$, $E = 0$ et $F = 0$), car à chaque élément de volume centré en un point $P(x, y, z)$ correspond un élément de volume centré symétriquement :

- soit en un point $P'(x, y, -z)$
- soit en un point $P''(-x, y, z)$

La matrice d'inertie du solide S en un point O *appartenant aux deux plans de symétrie* est donc *diagonale*, sous la forme :

$$\overline{\overline{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$$

3.4.3 Le solide S possède un axe de révolution



Pour un solide de révolution d'axe $(O, \vec{z}_s)$, la matrice d'inertie est *diagonale* mais avec la relation supplémentaire :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 \mathrm{d}m \quad \text{car} \quad \int_S x^2 \mathrm{d}m = \int_S y^2 \mathrm{d}m$$

La matrice d'inertie en un point O *appartenant à l'axe de révolution* s'écrit donc sous la forme :

$$\overline{\overline{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}$$

3.4.4 Le solide S est plan d'épaisseur négligeable

On se place sur un point O du plan avec $(O, \vec{z})$ la normale au plan. L'intégration suivant la direction de la normale au plan est nulle (les bornes d'intégration sont nulles).

Finalement la matrice s'écrit en un point O du plan et dans une base $\mathcal{B}$ contenant la normale à celui-ci :

$$\overline{\overline{I_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}_{O,B}$$

$$A = \int_{P\in S} y^2 + z^2 \text{ dm} = \int_{P\in S} y^2 \text{ dm}$$

$$C = \int_{P\in S} x^2 + y^2 \text{ dm} = A + B$$

$$D = \int_{P\in S} y \cdot z \cdot \text{dm} = 0$$

3.4.5 Le solide S est un disque plan d'épaisseur négligeable

Pour un disque plan, en O centre du disque et dans une base $\mathcal{B}$ telle que $\vec{z}$ est la normale au plan

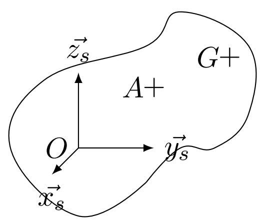
$$B = \int_{P\in S} x^2 + z^2 \text{ dm} = \int_{P\in S} x^2 \text{ dm}$$

$$E = \int_{P\in S} x \cdot z \cdot \text{dm} = 0$$

$$\overline{\overline{I_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot A \end{pmatrix}_{O,B}$$

3.5 Changement de point d'une matrice d'inertie - *Théorème de Huygens généralisé*

Ce théorème permet de passer la matrice d'inertie en un point quelconque d'un solide (ici un point A), à la matrice d'inertie au centre de gravité G.



À retenir

En posant $\overrightarrow{AG} = a\vec{x_s} + b\vec{y_s} + c\vec{z_s}$, le théorème de Huygens donne :

$$\overline{\overline{I}}_{(A,S,b_s)} = \overline{\overline{I}}_{(G,S,b_s)} + m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{b_s}$$

Démonstration :

Soit B la base $(\vec{x_s}, \vec{y_s}, \vec{z_s})$. On recherche la relation entre la matrice d'inertie en A du solide S et la matrice d'inertie en G le centre d'inertie du solide.

Par définition, l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base B s'écrit :

$$\overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} (\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}))\mathrm{d}m$$

De même l'opérateur d'inertie du solide S au point G dans la base B s'écrit :

$$\overline{\overline{I_G(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} (\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}))\mathrm{d}m$$

En décomposant le premier :

$$\overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} ((\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}) \wedge (\vec{u} \wedge (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP})))\mathrm{d}m$$

puis en développant

$$\begin{aligned}\overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \vec{u} = &\int_{P\in S} (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))\mathrm{d}m + \int_{P\in S} (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}))\mathrm{d}m \\ &+ \int_{P\in S} (\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))\mathrm{d}m + \int_{P\in S} (\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}))\mathrm{d}m\end{aligned}$$

Les deuxièmes et troisièmes termes de cette somme sont nuls (par définition du centre d'inertie $\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\ \mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$) :

$$\int_{P\in S} (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}))\mathrm{d}m = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\ \mathrm{d}m\right) = \overrightarrow{0}$$
$$\int_{P\in S} (\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))\mathrm{d}m = \left(\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\ \mathrm{d}m\right) \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{0}$$

L'égalité devient :

$$\overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))\mathrm{d}m + \int_{P\in S} (\overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}))\mathrm{d}m$$

On reconnaît dans le second terme l'opérateur d'inertie en G :

$$\overline{\overline{I_G(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} (\overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}))\mathrm{d}m$$

Il reste à déterminer le premier terme :

Les termes sous l'intégrale ne dépendent pas de la masse (variable d'intégration)

$$\int_{P\in S} (\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))\mathrm{d}m = m(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))$$

D'où le théorème de Huygens généralisé

$$\overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \vec{u} = \overline{\overline{I_G(S)}} \cdot \vec{u} + m(\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}))$$

Déterminons $\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})$ en fonction des coordonnées des deux vecteurs

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{et } \overrightarrow{AG} = (a, b, c).$$

Ce calcul a déjà été fait au paragraphe 3.0.1, on a :

$$\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \vec{u} = \overline{\overline{I_G(S)}} \cdot \vec{u} + m \cdot \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

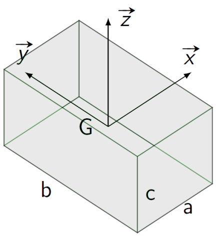
CQFD

Attention

Cette relation n'est *valable* qu'entre *le centre de gravité G de S et un autre point.* Si on veut passer d'un point A à un point B, *il faudra passer d'abord de A à G et ensuite passer de G à B.*

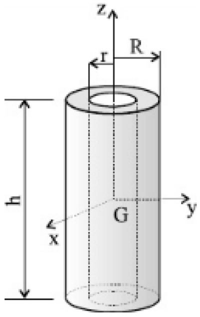
3.6 Matrice d'inertie en G de quelques solides élémentaires

3.6.1 Parallélépipède



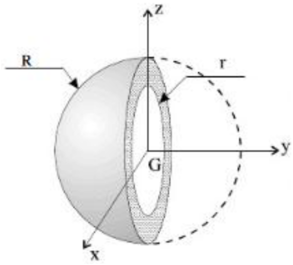
$$\overline{\overline{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m\dfrac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\dfrac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\dfrac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

3.6.2 Cylindre creux



$$\overline{\overline{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2+r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2+r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2+r^2}{2} \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

3.6.3 Sphère creuse



$$\overline{\overline{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} \frac{2m}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{5}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} \end{pmatrix}_{(-,-,-)}$$

4 Le torseur cinétique

4.1 Cas du point matériel M : *comme en physique !*

Pour un élément M de masse m de vitesse $\overrightarrow{V_{M/R}}$ relativement à un référentiel R on définit :

- $\overrightarrow{p_{M/R}} = m\overrightarrow{V_{M/R}}$ la quantité de mouvement ;
- $\overrightarrow{\sigma_{A,M/R}} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{V_{M/R}}$ le moment cinétique en un point A quelconque .

Remarque

Si l'on calcule $\overrightarrow{\sigma_{B,M/R}}$ il vient très vite :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,M/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,M/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{M/R}}$$

On reconnait alors la relation de Varignon !

Cela signifie que l'on peut définir un torseur appelé le **torseur cinétique** dont les éléments de réduction sont :

$$\{\mathscr{C}_{M/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{M/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,M/R}} \end{array} \right\}_A$$

On l'appelle aussi torseur des quantités de mouvement.

4.2 Cas d'un ensemble de points matériels

La quantité de mouvement et le moment cinétique sont des grandeurs additives. On considère un ensemble mécanique Σ constitué d'un ensemble discret de points matériels $M_1, M_2, \dots M_n$ auxquels on associe les masses $m_1, m_2, \dots m_n$. Si les éléments de Σ sont tels que les distances mutuelles entre chacun d'eux demeurent invariables alors l'ensemble mécanique est appelé solide invariable (ou plus simplement solide).

Le torseur cinétique $\{\mathscr{C}_{\Sigma/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{\Sigma/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,\Sigma/R}} \end{array} \right\}$ a pour composantes :

- $\overrightarrow{p_{\Sigma/R}}$ la quantité de mouvement et elle vaut

$$\overrightarrow{p_{\Sigma/R}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{V_{M_i/R}}$$

- $\overrightarrow{\sigma_{A,\Sigma/R}}$ le moment cinétique en un point A quelconque et il vaut :

$$\overrightarrow{\sigma_{A,\Sigma/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \overrightarrow{V_{M_i/R}}$$

Bon très bien mais ce qui nous intéresse nous.... Ce sont les solides !

4.3 Cas d'un système matériel E

Définition *Torseur cinétique*

Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m \end{array} \right\}_A$$

Avec :

- $\overrightarrow{V_{P/R}}$: Vitesse du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R
- $\overrightarrow{p_{E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m$: Résultante cinétique ou quantité de mouvement de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R
- $\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m$: Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

4.3.1 Résultante cinétique

Propriété

La quantité de mouvement se calcule donc finalement comme :

$$\overrightarrow{p_{E/R}} = \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m = m_E \cdot \overrightarrow{V_{G/R}}$$

Démonstration :

Soit O un point lié au référentiel $\mathcal{R}$ et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel E, par définition du centre d'inertie : $m_E\overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\ dm$.

En dérivant par rapport au temps dans R : $m_E \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OG}\right]_R = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\ \mathrm{d}m\right]_R$

Compte tenu du principe de conservation de la masse, on peut permuter la dérivation par rapport au temps et l'intégration sur la masse :

$$m_E \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OP}\right]_R\ \mathrm{d}m$$

On reconnaît la vitesse du point G et celle du point P par rapport au repère R.

4.3.2 Changement de point

Propriété

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{p_{E/R}}$$

ou

$$\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \cdot \overrightarrow{V_{G/R}}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m \\
\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m = \int_{P\in E} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m \\
\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} &= \int_{P\in E} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m \\
\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} &= \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{d}m + \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}
\end{aligned}$$

On reconnaît la relation de changement de point d'un torseur, le champ des moments cinétiques $\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}$ est équiprojectif.

4.3.3 Cas du solide indéformable

Soit S, un solide indéformable de masse m_s.

L'hypothèse de solide indéformable, permet d'associer les propriétés du champ des vecteurs vitesses d'un solide aux propriétés du torseur cinétique. Ainsi, pour P et A deux points liés au solide, la relation de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$: le vecteur rotation du solide S par rapport au repère R.

Pour un solide S le torseur cinétique s'écrit :

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \mathrm{dm} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \mathrm{dm} \end{array} \right\}_A$$

et la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{P\in S} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \mathrm{dm} = m_S \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}.$$

Propriété

Finalement, le moment cinétique d'un solide indéformable dans son mouvement par rapport à un repère R devient

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overline{\overline{I_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m_S \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Démonstration :

En faisant intervenir le point A dans la détermination du moment cinétique d'un solide indéformable, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} &= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \mathrm{dm} \\
&= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \mathrm{dm} \\
&= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \mathrm{dm} + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \mathrm{dm} \\
&= \left(\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \cdot \mathrm{dm}\right) \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \mathrm{dm}
\end{aligned}$$

On reconnaît :

- dans le premier terme la définition du centre d'inertie G :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \cdot \mathrm{dm} = m_S \overrightarrow{AG}$$

- dans le deuxième terme l'opérateur d'inertie du solide S au point A appliqué au vecteur :

$$\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP}\right)\cdot \mathrm{dm}=\overline{\overline{I_A(S)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Remarque

- *Moyen mnémotechnique :* « sigmA égal *Jérome plus magva* »
- Cette relation est importante mais on s'attachera à l'utiliser dans les cas particuliers suivants qui facilitent les calculs.

4.3.4 Expression pratique du torseur cinétique

- Le point A est confondu avec le centre d'inertie G

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}=\overline{\overline{I_G(S)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

- A est un point fixe dans le repère R

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}=\overline{\overline{I_A(S)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

- Le mouvement du solide S par rapport au repère R est une translation

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}=m_S\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Remarque

Il est souvent préférable de calculer le moment cinétique soit au centre d'inertie, soit en un point A du solide S fixe dans le repère R puis d'utiliser la relation de changement de point si nécessaire pour le ramener au point d'étude.

4.4 Torseur cinétique d'un ensemble Σ de solides

Si on note Σ un ensemble de n solides : $\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$, alors :

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/R}\}=\sum_{i=1}^{n}\{\mathscr{C}_{S_i/R}\}$$

On a donc

$$\overrightarrow{p_{\Sigma/R}}=m_\Sigma\overrightarrow{V_{G_\Sigma/R}}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{V_{G_i,S_i/R}}$$

et

$$\overrightarrow{\sigma_{A,\Sigma/R}}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\sigma_{A,S_i/R}}$$

avec :
G_Σ centre d'inertie de Σ et m_Σ la masse de Σ.

Bilan, cas particuliers et formules à utiliser

Pour calculer le torseur cinétique d'un solide S indéformable dans son mouvement par rapport à un référentiel R, on utilisera donc les expressions suivantes :

$$\{\mathscr{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{S/R}} = m\overrightarrow{V_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/R}} \end{array} \right\}$$

La difficulté essentielle est de calculer le moment cinétique. Selon le point choisi ou selon le mouvement du solide S dans R la formule générale peut se simplifier.

On utilisera donc les formules suivantes :

- $$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/R}}$$
- relation de transport du moment cinétique :
$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}}$$
- si $A \in S$ et fixe dans le référentiel R $\left(\overrightarrow{V_{A,S/R}} = \overrightarrow{0}\right)$ alors :
$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$
- en G centre d'inertie de S, on a
$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = \overline{\overline{I}}_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$
- si S est en translation par rapport à R, alors en G :
$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = \overrightarrow{0}$$
- si S est en rotation autour d'un axe $\Delta(A, \vec{u})$ fixe dans R, alors
$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \cdot \vec{u} = I_{\Delta,S}\omega_{S/R}$$