Principe fondamental de la dynamique

Cours

v1.1 Ⓟ

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

Introduction

L'énoncé original de la deuxième loi de Newton est le suivant :

« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

Dans sa version moderne, vous la connaissez sous le p'tit nom de **principe fondamental de la dynamique (PFD)**.

« Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un solide est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide : »

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathrm{F}}_i$$

Et l'idée de ce chapitre est de vous donner la version torsorielle du PFD :

« Il existe un référentiel (un repère associé à une chronologie) dit repère Galiléen $\mathcal{R}_g$, tel qu'à tout instant, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur le système matériel Σ est égal au torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport au repère Galiléen. »

Et pour écrire cette version du PFD, il va nous falloir définir le torseur dynamique.

1 Le torseur dynamique

Qu'on l'appelle aussi torseur des quantités d'accélération.

1.1 Cas du point matériel M

Pour un élément M de masse m d'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$ relativement à un référentiel R, on définit le torseur dynamique $\{\mathscr{D}_{M/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d\,M/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,M/R}} \end{array} \right\}$ avec :

- $\overrightarrow{R_{d\,M/R}} = m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$ la quantité d'accélération ;
- $\overrightarrow{\delta_{A,M/R}} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$ le moment dynamique en un point A quelconque .

On peut montrer aisément que le champ de moment dynamique est un champ équiprojectif et que de fait, on peut définir ce torseur (et utiliser Varignon).

<u>Démonstration</u> :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta_{B,M/R}} &= \overrightarrow{BM} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} \\ &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} \\ &= \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} \\ &= \overrightarrow{\delta_{A,M/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}\end{aligned}$$

1.2 Cas d'un ensemble de points matériels

La quantité d'accélération et le moment dynamique sont des grandeurs additives. On considère un ensemble mécanique E constitué d'un ensemble discret de points matériels $M_1, M_2, \dots M_n$ auxquels on associe les masses $m_1, m_2, \dots m_n$. Si les éléments de E sont tels que les distances mutuelles entre chacun d'eux demeurent invariables alors l'ensemble mécanique est appelé solide invariable (ou plus simplement solide).

Le torseur dynamique $\{\mathscr{D}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d\,E/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} \end{array} \right\}$ a pour éléments de réduction :

- $\overrightarrow{R_{d\,E/R}}$ la quantité d'accélération et vaut : $\overrightarrow{R_{d\,E}/R} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}}$
- $\overrightarrow{\delta_{A,E/R}}$ le moment dynamique en un point A quelconque et vaut :

$$\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}}$$

1.3 Cas d'un solide S

Un solide S peut être considéré comme un ensemble continu de points matériels M ayant une masse élémentaire dm.

Le torseur dynamique $\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d\,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} \end{array} \right\}$ a pour éléments de réduction :

- $\overrightarrow{R_{d\,S/R}}$ la quantité d'accélération et vaut $\overrightarrow{R_{d\,S/R}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M,S/R}}\, \mathrm{d}m$
- $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}}$ le moment dynamique en un point A et vaut $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M,S/R}}\, \mathrm{d}m$

Cependant ces écritures ne sont pas les plus pratiques à manipuler.

Dans l'énoncé 2 du PFD que vous connaissez il est dit qu'il faut calculer la dérivée de la quantité de mouvement pour écrire ce théorème. Alors faisons ça !

1.4 Expression pratique de la résultante dynamique pour un solide S

On suppose ici un solide S, en mouvement dans un référentiel quelconque R, alors la quantité d'accélération totale du solide, dans l'hypothèse de la conservation de la masse, est la même qu'aurait le centre de masse affecté de la masse totale m du solide S.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_{d\,S/R}} &= \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M,S/R}}\,\mathrm{d}m \\
&= \int_S \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right]_R \mathrm{d}m \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}^2\left(\int_S \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m\right)}{\mathrm{d}t^2}\right]_R \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}^2(m\overrightarrow{OG})}{\mathrm{d}t^2}\right]_R
\end{aligned}$$

Remarque

On retrouve bien que la quantité d'accélération d'un solide est la dérivée de sa quantité de mouvements :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_{d\,S/R}} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P_{S/R}}}{\mathrm{d}t} \\
&= m \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{G,S/R}}}{\mathrm{d}t} \\
&= m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}
\end{aligned}$$

À retenir

La résultante dynamique (quantité d'accélération d'un solide S en mouvement dans un référentiel R s'écrit :

$$\overrightarrow{R_{d\,S/R}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$$

1.5 Expression pratique du moment dynamique pour un solide S

Puisque cela a marché avec la résultante ; ce serait dommage de ne pas essayer avec le moment. Prenons alors l'expression du moment cinétique et dérivons la : Démonstration :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M,S/R}}\,\mathrm{d}m\right]_R \\
\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R &= \int_S \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t}\right]_R \wedge \overrightarrow{V_{M,S/R}}\,\mathrm{d}m + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{M,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R \mathrm{d}m \\
\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R &= \int_S \left(\overrightarrow{V_{M,S/R}} - \overrightarrow{V_{A/R}}\right) \wedge \overrightarrow{V_{M,S/R}}\,\mathrm{d}m + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M,S/R}}\,\mathrm{d}m \\
\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R &= -\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}} + \overrightarrow{\delta_{A,S/R}}
\end{aligned}$$

|

À retenir

Le moment dynamique du solide S en mouvement dans un référentiel R s'écrit :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}}$$

Avec $\overrightarrow{V_{A/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right]_R$ vitesse absolue de A dans R.

1.6 Bilan

Pour calculer le torseur dynamique d'un solide S dans son mouvement par rapport à un référentiel R, on utilisera donc les expressions suivantes :

$$\{\mathscr{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{d\,S/R}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}} \end{array} \right\}$$

La difficulté essentielle est de calculer le moment dynamique. Selon le point choisi ou selon le mouvement du solide S dans R la formule générale peut se simplifier. On utilisera donc les formules suivantes :

- Relation avec le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}}$$

- Relation de transport du moment dynamique (*VARIGNON*) :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{B,S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$$

2 Le Principe Fondamental de la Dynamique

Pour la suite du cours, nous prendrons comme hypothèses (sauf exceptions) :

- référentiels galiléens
- principe de conservation de la masse
- solide indéformable $\left(\forall (A,B) \in (S)^2 \text{ alors } AB = \text{cste}\right)$
- liaisons parfaites (pas d'adhérence, ni de frottement)

2.1 Cas du point matériel *comme en physique*

Soit P, un point matériel de masse m, le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit alors :

$$\exists R_g tq: \quad \sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow P}} = m\overrightarrow{\Gamma_{P/R_g}} \quad \text{et} \quad \sum \overrightarrow{M_{P, \text{ ext} \rightarrow P}} = \overrightarrow{0}$$

En pratique, on assimilera souvent les billes, ou les pièces de petites dimensions, à des points matériels (embrayage centrifuge, masselotte d'équilibrage,...)

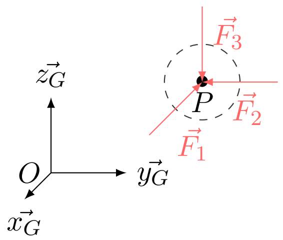


FIGURE 1 – Point matériel P soumis à 3 actions mécaniques évoluant dans R_g.

2.2 Cas du solide

On peut, comme dans les chapitres précédents, considérer qu'un solide n'est qu'un ensemble de points matériels M affectés de la masse dm.

On peut alors écrire :

$$\exists R_g tq \forall M \in S: \quad \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\rightarrow M}} = dm\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} \quad \text{et} \quad \sum \overrightarrow{M_{M,\text{ext}\rightarrow M}} = \overrightarrow{0}$$

Il reste alors à généraliser au solide entier en intégrant sur l'ensemble du solide.

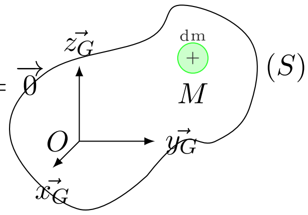


FIGURE 2 – Solide S dans R_g Galiléen

2.3 Théorème de la résultante dynamique

Il suffit d'intégrer sur tout le solide, à savoir :

$$\int_S \sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow M}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm$$

En examinant séparément ces deux termes on en déduit que :

$$\int_S \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\rightarrow M}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\rightarrow S}} \quad \text{et} \quad \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm = m\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

Démonstration :

$$\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm = \int_S \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_{R_g} dm$$

Or la conservation de la masse donne :

$$\int_S dm\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\int_S \overrightarrow{OM} dm\right]_{R_g}$$

Et par définition du centre d'inertie :

$$\int_S \overrightarrow{OM} dm = m\overrightarrow{OG}$$

$$\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm = \left[\frac{d^2}{dt^2} m\overrightarrow{OG}\right]_{R_g} = m\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

On a ainsi l'égalité suivante :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

2.4 Théorème du moment dynamique

Il suffit d'intégrer sur tout le solide, en un point particulier par exemple A point lié à S, à savoir :

$$\int_S \sum \overrightarrow{M_{M,\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0}$$

On peut alors écrire cette égalité sous la forme :

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$$

Démonstration :

$$\int_S \sum \overrightarrow{M_{M,\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0}$$

$$\int_S \sum \overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to M}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0} \quad \text{(Changement de point du moment)}$$

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = \overrightarrow{0} \quad \left(M \text{ de masse } dm : \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}} = dm\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\right)$$

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} + \int_S \overrightarrow{MA} \wedge dm\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$$

On a ainsi le théorème du moment dynamique (peu utilisé sous cette forme) :

$$\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm$$

On reconnait ici l'expression du moment dynamique : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$

Attention

Cette démonstration n'a de sens que parce que les moments sont calculés **dans le même référentiel et au même point**.

À retenir

Le **PFD** revient à exprimer une équation torsorielle :

$$\{\mathcal{T}_{ext\to S}\}_A = \{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A$$

Donc, deux équations vectorielles :

- Théorème de la résultante dynamique – TRD :

$$\overrightarrow{R_{ext\to S}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$$

- Théorème du moment dynamique – TMD en A :

$$\overrightarrow{M_{A,ext\to S}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$$

Et ainsi, 6 équations scalaires correspondants aux projections sur les différents axes.

Attention

Comme toute égalité torsorielle, elle n'a de sens que si les torseurs sont écrits **dans le même référentiel et au même point**.

3 Loi de mouvement

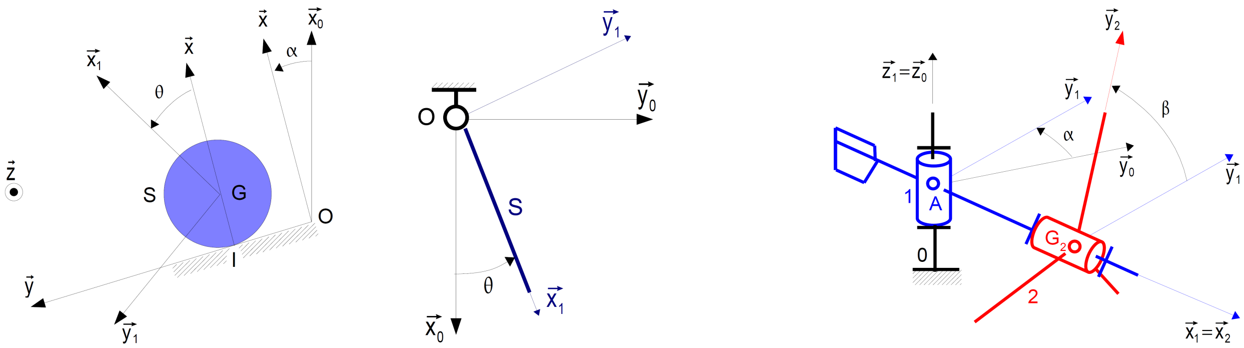
La loi de mouvement d'un solide consiste à trouver l'équation différentielle reliant les paramètres géométriques, cinématiques et inertiels ainsi que les actions mécaniques extérieures (donc supposées connues) ne faisant pas intervenir des inconnues statiques de liaisons.

Afin de l'obtenir, l'application du PFD au solide S ou à l'ensemble de solides $\sum$ en un point particulier est nécessaire. Nous verrons qu'il est possible de la trouver beaucoup plus simplement avec une méthode énergétique (TEC) dans le cas d'un système à un seul degré de liberté.

En Figure 3a, le point I est adapté, car il ne fait pas intervenir les inconnues statiques entre le solide S et le solide 0.

En Figure 3b, le point O est adapté, car il ne fait pas intervenir les inconnues statiques entre le solide S et le solide 0.

En Figure 3c, le point G_2 est adapté (PFD appliqué à 2), si l'on souhaite déterminer la loi de mouvement du solide 2 par rapport à 1. Si l'objectif est déterminer la loi de mouvement de 2 par rapport à 0, le PFD appliqué 1+2 doit être écrit en A.



(a) Roulement sans glissements (b) Pendule simple (c) Éolienne

Figure 3 – Mécanismes dont les lois de mouvement sont recherchées

4 Méthodologie de résolution

Comme on l'a indiqué en début de ce cours, en dynamique, on rencontre deux types de problématique :

- les efforts sont connus … et on souhaite déterminer les mouvements ;
- les mouvements sont connus (désirés) … et on souhaite déterminer les actions mécaniques nécessaires.

Dans tous les cas, il nous faut des équations (scalaires ou vectorielles) pour pouvoir relier les actions mécaniques aux paramètres de mouvement. La démarche globale est exposée ci-après en 6 étapes :

Démarche

1. Tracer le graphe de structure du mécanisme et les figures géométrales ;
2. Proposer une démarche (stratégie) d'isolement permettant de répondre à l'objectif ;
3. Faire le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) s'exerçant sur le solide S ou l'ensemble de solides $\sum$ et calculer $\{\mathcal{T}_{ext \to S}\}$ ou $\{\mathcal{T}_{ext \to \sum}\}$;
4. Écrire le PFD appliqué au solide S isolé ou à l'ensemble de solides $\sum$ isolés ;
5. Calculer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}$ ou $\{\mathcal{D}_{\sum/R_g}\}$;
6. Écrire les équations vectorielles ou scalaires, et résoudre.

4.1 Graphe de structure

On repère sur le graphe de structure (graphe de liaisons et actions mécaniques extérieures) les différentes liaisons entre les sous-ensembles considérés, et les interactions avec l'environnement du système isolé.

4.2 Démarche d'isolement

On isole un solide S ou un ensemble de solides $\sum$, autrement dit, c'est à ce stade que l'on va définir ce qui est l'extérieur et l'intérieur du système isolé. La suite de l'étude ne concerne *que les actions extérieures*.

C'est une des phases importantes, permettant de faire ressortir ou au contraire de « masquer » l'influence de certaines actions mécaniques.

4.3 BAME et calcul de $\{\mathcal{T}_{ext \to S}\}$ ou $\{\mathcal{T}_{ext \to \sum}\}$

On réalise alors l'inventaire, le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) par rapport à la partie isolée précédemment. On retrouve ce que l'on a déjà établi en statique (actions à distance - actions de contact), et on calcule $\{\mathcal{T}_{ext \to S}\}$ ou $\{\mathcal{T}_{ext \to \sum}\}$.

4.4 Écriture du PFD

On écrit le PFD au solide S ou à l'ensemble de solides $\sum$ isolé(s) :

Cas d'un seul solide isolé :

$$\{\mathcal{T}_{ext \to S}\}_A = \{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A$$

Cas d'un ensemble de solides isolés $\sum = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$:

$$\{\mathcal{T}_{ext \to \Sigma}\}_A = \{\mathcal{D}_{\Sigma/R_g}\}_A$$

avec $\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_g}\}_A = \{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\}_A + \{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\}_A + \ldots + \{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\}_A$

4.5 Calcul du torseur dynamique $\left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}$ ou $\left\{\mathcal{D}_{\sum/R_g}\right\}$

C'est souvent la partie qui amène le plus de calcul, particulièrement pour les moments.

- Théorème de la Résultante Dynamique – TRD : $m\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$
- Théorème du Moment Dynamique – TMD : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$

À retenir

Ce moment dynamique dépend du mouvement de S ou $\sum$ par rapport à R_g et du point d'écriture.

On aura les outils suivants :

- La relation avec le moment cinétique :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}}$$

- Relation de transport, Varignon :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{B,S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$$

Et on s'attachera donc à choisir des points particuliers :

- si A est un point fixe dans le référentiel R, $\left(\overrightarrow{V_{A/R}} = \overrightarrow{0}\right)$ alors :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R$$

- en G centre d'inertie de S, on a

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right]_R$$

- si S est en translation par rapport à R, alors en G :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \overrightarrow{0}$$

- si S est en rotation autour d'un axe $\Delta(A,\vec{u})$ fixe dans R, alors

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} \cdot \vec{u} = I_{\Delta,S}\frac{\mathrm{d}\omega_{S/R}}{\mathrm{d}t}$$

La FIGURE 4 montre les chemins de calcul possibles pour obtenir $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}}$.

1. $\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = \overline{\overline{I}}_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$
2. $\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right)_R$
3. $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{G,S/R}} + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$
4. Théorème de Huygens
5. $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,S/R}}$
6. $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}}$
7. $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R}}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\overline{I}}_G(S) \arrow[r, "4"] \arrow[d, "1"'] & \overline{\overline{I}}_A(S) \arrow[d, "5"] \\
\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} \arrow[r, "7"] \arrow[d, "2"'] & \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \arrow[d, "6"] \\
\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} \arrow[r, "3"] & \overrightarrow{\delta_{A,S/R}}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4 – Résumé des chemins possibles

Remarque

Il n'y a pas de règle générale et absolue pour le choix de la démarche. Le choix dépend des **données en entrées du problème**. Néanmoins, le chemin $1-2-3$ est souvent le plus simple. De plus en PSI/MP, il est relativement rare d'avoir à effectuer Huygens.

4.6 Écriture des équations - Résolution

On écrit alors les six équations scalaires issues du PFD (ou du moins celles qui permettent de répondre au problème posé). Il faut pour cela écrire les torseurs *au même point* et *dans la même base*.

Si la résolution n'aboutit pas, on peut être amené, soit à faire des hypothèses simplificatrices, soit à isoler d'autres solides ou ensembles de solides.

5 Conseils pour les calculs

- Il est *inutile* d'exprimer les différents vecteurs dans *les bases globales* ;
- Pour calculer la composante suivant un axe d'un vecteur, on utilisera souvent la relation suivante (identique à celle de la dérivée d'un produit de deux fonctions réelles) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_R \cdot \vec{z} = \frac{\mathrm{d}\,(\vec{u}\cdot\vec{z})}{\mathrm{d}t} - \vec{u} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{z}}{\mathrm{d}t}\right|_R$$

Cette relation est très utilisée pour le calcul du moment dynamique, si seule la composante suivant $\vec{z}$ est utile au calcul. Par exemple :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{\mathrm{d}t}\right|_R \cdot \vec{z} = \frac{\mathrm{d}\,(\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}\cdot\vec{z})}{\mathrm{d}t} - \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{z}}{\mathrm{d}t}\right|_R$$

Cette méthode permet de manipuler des calculs *plus simples* et *plus rapides*.

- Pour calculer la dérivée d'un vecteur $\vec{u}$ par rapport à R_1, on ne projettera pas, mais on utilisera la formule de dérivation vectorielle (dite « formule de Bour ») :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} = \left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \vec{u}$$

- Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à l'axe Δ, noté I_Δ se calcule avec la relation ($\vec{k}$ étant un vecteur unitaire porté par Δ) :

$$I_\Delta = \vec{k}.\left(\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\vec{k}\right)$$

6 Équilibrage

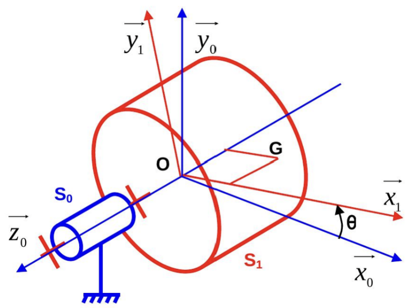
L'équilibrage dynamique concerne les pièces en mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans un repère galiléen. C'est donc le cas de la plupart des machines tournantes (moteurs électriques par exemple) mais également des roues de voiture, de vélo etc...

Si le système n'est pas équilibré dynamiquement, cela va générer des vibrations dans l'ensemble du mécanisme, donc du bruit et éventuellement une usure plus rapide des organes de guidage en rotation.

6.1 Positionnement du problème

On considère :
- Le bâti S_0 est lié au repère galiléen $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$
- Le solide S_1 de masse m, de centre d'inertie G est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ avec le bâti S_0.
- Le repère R_1 $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ est lié à S_1 et est choisi tel que G soit dans le plan $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_0})$

On pose :
- $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \theta$
- Et $\overrightarrow{OG} = a \cdot \overrightarrow{x_1} + c \cdot \overrightarrow{z_0}$



Remarque

À ce stade, vous devriez avoir remarqué que G **n'est pas sur l'axe de rotation**.

Le solide S_1 étant quelconque, la matrice d'inertie est de la forme :

$$\bar{\bar{I}}_O(S_1) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

Le milieu extérieur exerce sur S_1 des actions mécaniques qui peuvent être quelconques (dans le cas d'une roue de voiture, c'est l'action de la route sur la roue, l'action de la pesanteur, l'action de l'arbre de transmission...). On modélise cette action par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_{ext\to s_1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{ext\to s_1}} = X_{e1} \cdot \overrightarrow{x_1} + Y_{e1} \cdot \overrightarrow{y_1} + Z_{e1} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{O,ext\to s_1}} = L_{e1} \cdot \overrightarrow{x_1} + M_{e1} \cdot \overrightarrow{y_1} + N_{e1} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}$$

La liaison pivot exerce également une action qui se modélise dans le cas d'une liaison parfaite par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}_{S_0\rightarrow s_1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{S_0\rightarrow s_1}} = X_{01}\cdot\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\cdot\overrightarrow{y_1} + Z_{01}\cdot\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{O,S_0\rightarrow s_1}} = L_{01}\cdot\overrightarrow{x_1} + M_{01}\cdot\overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}$$

Remarque

Ces torseurs sont exprimés dans la base B_1... Un choix judicieux, et justifié après !

Hypothèse : on connaît les actions exercées par le milieu extérieur.

6.2 Calcul du torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{S_1/S_0}\}_O$

Objectif

On souhaite déterminer les inconnues de liaison $S_0 \rightarrow S_1$

Démonstration :

On applique donc le PFD au solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0.

$$\{\mathcal{D}_{S_1/R_0}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{S_1}\rightarrow S_1}\} = \{\mathcal{T}_{S_0\rightarrow S_1}\} + \{\mathcal{T}_{ext\rightarrow S_1}\}$$

Il faut donc déterminer le torseur dynamique :

$$\{\mathcal{D}_{S_1/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} \\ \delta_{O,S_1/R_0} \end{array} \right\}$$

Pour effectuer les calculs, on doit procéder à quelques étapes :

$$\overrightarrow{V_{G,S_1/R_0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = a\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Gamma_{G,S_1/R_0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_{G,S_1/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = -a\cdot\dot{\theta}^2\cdot\overrightarrow{x_1} + a\cdot\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_1}$$

Le point O étant fixe dans RO, on a

$$\overrightarrow{\delta_{O,S_1/R_0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,S_1/R_0}}}{dt}\right]_{R_0}$$

Et :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,S_1/R_0}} = \overline{\overline{\mathrm{I}_O(S_1)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} = \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0}$

Soit :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,S_1/R_0}} = -E\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{x_1} - D\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_1} + C\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0}$$

Enfin le moment dynamique s'exprime :

$$\overrightarrow{\delta_{O,S_1/R_0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,S_1/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,S_1/R_0}}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{O(S_1/R_0)}}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta_{O(s_1/R_0)}} &= -E\cdot\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{x_1} - D\cdot\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_1} + C\cdot\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0}\wedge\left(-E\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{x_1} - D\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{y_1} + C\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0}\right)\\ &= \left(-E\cdot\ddot{\theta} + D\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\overrightarrow{x_1} - \left(D\cdot\ddot{\theta} + E\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\overrightarrow{y_1} + C\cdot\ddot{\theta}\cdot\overrightarrow{z_0}\end{aligned}$$

Les deux équations vectorielles issues du PFD en projection dans la base R_1 $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ nous donnent donc les 6 équations scalaires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{cc} -m\cdot a\cdot\dot{\theta}^2 & = X_{01} + X_{e1} \\ m\cdot a.\ddot{\theta} & = Y_{01} + Y_{e1} \\ 0 & = Z_{01} + Z_{e1} \\ -E.\ddot{\theta} + D\cdot\dot{\theta}^2 & = L_{01} + L_{e1} \\ -\left(D.\ddot{\theta} + E\cdot\dot{\theta}^2\right) & = M_{01} + M_{e1} \\ C.\ddot{\theta} & = N_{e1} \end{array}\right.$$

6.3 Conditions d'équilibrage

Pour éviter les vibrations, il faut rendre l'action mécanique dans la liaison entre S_0 et S_1 aussi constante que possible, et en particulier qu'elle soit indépendante de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

Dans cet exercice

Pour que notre solide soit équilibré il faut satisfaire aux deux conditions :

- a = 0 : le centre d'inertie doit être sur l'axe de rotation : condition d'équilibrage statique
- $D = 0$ et $E = 0$: l'axe de rotation doit être un axe principal d'inertie pour S_1.

À retenir

Équilibrage statique

On dit qu'un solide en rotation est équilibré statiquement lorsque le centre d'inertie est sur l'axe de rotation.

Équilibrage dynamique

On dit qu'un solide est équilibré dynamiquement, s'il est équilibré statiquement et que les produits d'inertie comportant l'axe de rotation sont nuls.

En pratique :

Équilibrer un solide en rotation revient donc à annuler les différents termes ci dessus. Deux stratégies sont envisageables

- Ajouter des masses au solide afin de modifier ces caractéristiques cinétiques.
- Usiner le solide (perçage, meulage) afin de modifier la répartition des masses.

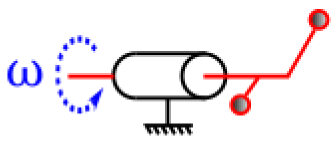
La première solution est utilisée pour réaliser l'équilibrage des roues de véhicules, On retrouve plutôt la seconde lors d'équilibrages réalisés sur des pièces massives (volant d'inertie), ces usinages sont alors effectués en usine, lors de la fabrication.

Du point de vue des calculs à réaliser, les deux méthodes sont analogues, la seconde revient à ajouter des masses négatives.

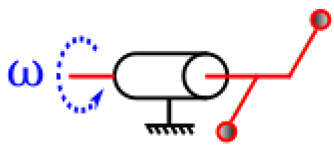
Attention

L'équilibrage statique est une condition NÉCESSAIRE de l'équilibrage dynamique et non suffisante.

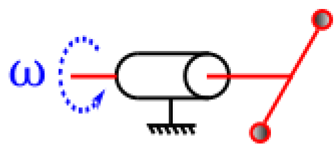
6.4 Illustration avec 2 masses ponctuelles



Les 2 masses ne sont pas à la même distance de l'axe de rotation : on n'a ni l'équilibrage statique, ni l'équilibrage dynamique.



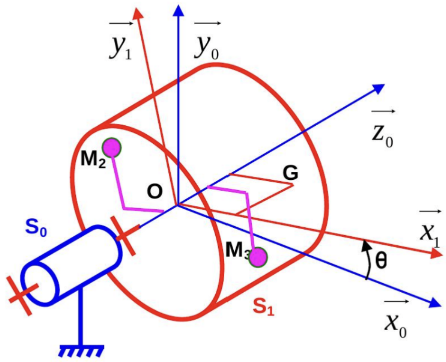
Les 2 masses sont à la même distance de l'axe : on a réalisé l'équilibrage statique.



Les 2 masses sont en face l'une de l'autre : on a réalisé l'équilibrage dynamique.

6.5 Réalisation de l'équilibrage dynamique

Reprenons le problème vu plus haut. Dans le cas où l'on ne peut pas jouer sur la position des masses en rotation (roue, axe moteur etc...), on peut envisager de rajouter d'autres masses ponctuelles afin de réaliser l'équilibrage statique et dynamique.
On appelle S_2 et S_3 les deux masses ponctuelles, que l'on va fixer sur le solide S_1. On appelle M_2 et M_3 les points où sont placées ces deux masses.



$$\overrightarrow{OM_2} = x_2 \cdot \overrightarrow{x_1} + y_2 \cdot \overrightarrow{y_1} + z_2 \cdot \overrightarrow{z_0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM_3} = x_3 \cdot \overrightarrow{x_1} + y_3 \cdot \overrightarrow{y_1} + z_3 \cdot \overrightarrow{z_0}$$

Démonstration :

Par définition du centre d'inertie du solide S_Σ constitué des solides $S_1 + S_2 + S_3$, on a

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\overrightarrow{OG_e} = m \cdot \overrightarrow{OG} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2} + m_3 \cdot \overrightarrow{OM_3}$$

Pour que G_Σ soit sur l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$, on doit donc avoir en projetant cette relation sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:

$$m \cdot a + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 = 0 \qquad (1)$$
$$m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 = 0 \qquad (2)$$

Les produits d'inertie D_Σ et E_Σ valent :

$$D_\Sigma = D + m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot y_3 \cdot z_3$$
$$E_\Sigma = E + m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot x_3 \cdot z_3$$

(application du théorème de Huygens)

La **condition d'équilibrage dynamique** impose que D_Σ et E_Σ soient nuls, ce qui se traduit par :

$$D + m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot y_3 \cdot z_3 = 0 \qquad (3)$$
$$E + m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot x_3 \cdot z_3 = 0 \qquad (4)$$

Remarque

- Si $D \neq 0$, on a besoin des 2 masses pour faire l'équilibrage, car si $m_3 = 0$, la relation (2) impose que $y_2 = 0$ ce qui ne permet pas de rendre la relation (3) vraie
- On dispose de 4 équations et de 8 inconnues (masses + coordonnées de S_2 et S_3. On a donc une infinité de solution.

Dans le cas de l'équilibrage d'une roue de voiture, les masses sont fixées sur le bord de la jante dans le cas d'une jante en tôle ou bien collées sur la jante dans le cas d'une jante en aluminium. On impose donc le rayon et la composante selon $\overrightarrow{z_0}$ pour chacune des masses, ce qui ne laisse que 4 paramètres pour 4 équations. La solution est donc unique et consiste donc à choisir la valeur de la masse et la position angulaire de celle ci.

Dans le cas des moteurs électriques, on ne rajoute pas des masses mais on en « retire » en venant usiner localement la partie en fer doux du rotor.

Attention

L'équilibrage statique est une condition NÉCESSAIRE de l'équilibrage dynamique et non suffisante.

Synthèse

Chapitre 7 - Dynamique des solides

Torseur des actions mécaniques exterieures

$$\{\mathcal{T}_{ext\to S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext\to S}} = \sum \overrightarrow{F_{ext\to S}} \\ \overrightarrow{M_{A,ext\to S}} = \sum \overrightarrow{M_{A,\overrightarrow{F_{ext\to M}}}} \end{array} \right\}_A$$

Torseur cinétique *Général puis avec Hypothèse solide indéformable + cons. masse*

$$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p_{S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \cdot \mathrm{d}m = m\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} \cdot \mathrm{d}m = \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} \end{array} \right\}_A$$

Torseur dynamique *Général puis avec Hypothèse solide indéformable + cons. masse*

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{d,S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} \cdot \mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} \cdot \mathrm{d}m \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R_g}} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R_g}}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\overrightarrow{V_{G,S/R_g}} \end{array} \right\}$$

Centre d'inertie (gravité) d'un solide

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AG_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Principe fondamental de la dynamique

$$\{\mathcal{T}_{ext\to S}\}_A = \{\mathcal{D}_{S/R_g}\}_A$$

- Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_{ext\to S}} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$
- Théorème du moment dynamique en A : $\overrightarrow{M_{A,ext\to S}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}$

Équilibrage

- Condition d'équilibrage statique :

  « Un rotor est équilibré statiquement si son centre de gravité est situé sur son axe de rotation. »

- Condition d'équilibrage dynamique :

  « Un rotor est équilibré dynamiquement si son centre de gravité est situé sur son axe de rotation. **ET** que son axe de rotation est axe principal d'inertie. »