Théorèmes énergétiques

Cours

v1.1

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons parler de ce qui est le plus important dans votre scolarité et apprentissage scientifique. Cette importance n'est pas due aux concours, mais à ce précepte finalement très simple :

Notre monde est régi par la conservation de l'énergie

Alors déjà il faut définir l'énergie.

Définition *Énergie*

L'énergie est une grandeur physique qui caractérise/mesure la capacité d'un système à modifier son état (produire un travail, mise en mouvement, rayonnement...). Elle s'exprime en **joules** et est de dimension ML^2T^{-2}.

1 Historique - Définition

En 1686, Leibniz montre que la quantité mv^2, appelée « force vive », se conserve.

En 1788, Lagrange montre l'invariance de la somme de deux quantités, que l'on appellera plus tard « énergie cinétique » et « énergie potentielle ».

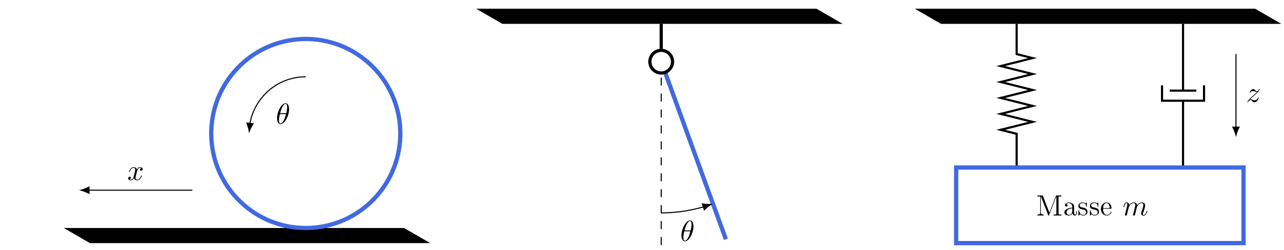
Au XIXème siècle, on parvient par une série d'expériences à mettre en évidence les constats (lois) suivants :
- la chute d'un poids donné d'une même hauteur produit toujours le même échauffement (calorimétrie) ;
- si la vitesse finale n'est pas nulle, la hausse de température est moindre, comme si seulement une partie de la chute était convertie en vitesse et le reste en chaleur ;
- de même un échauffement pourra produire une dilatation, une augmentation de pression, qui elle-même permettra de « travailler » par exemple en déplaçant une masse ;
- le « total » est toujours conservé : ainsi naît le concept scientifique d'énergie.

L'énergie se conserve dans tous les phénomènes, devenant tour à tour, chaleur, pression, vitesse, hauteur, etc. Ainsi, grâce à l'énergie, on peut mettre en relation des observations aussi différentes qu'un mouvement, une rotation, une température, la couleur d'un corps ou d'une lumière, une consommation de sucre ou de charbon, une usure, etc.

Il apparaît également que si l'énergie se conserve et se transforme, certaines transformations sont faciles ou réversibles et d'autres non.

Par exemple, il est facile de transformer de la hauteur de chute en échauffement, et on peut le faire intégralement, en revanche l'inverse est délicat et une partie de l'énergie devra être diffusée, et donc perdue. Cette observation sera à la base de l'idée d'entropie.

Dans notre cas, nous allons montrer, par le biais du Théorème de l'Énergie Cinétique, que les méthodes énergétiques, par une approche globale des calculs, sont plus intéressantes que le P.F.D. dans certains cas particuliers (Systèmes à variable unique. Voir FIGURE 1).



Roulement sans gl. ($x = R\theta$) Pendule simple Système oscillant à 1 ddl

FIGURE 1 – Systèmes à variable unique

2 Rappels sur les notions d'Énergie, de Travail et de Puissance

L'énergie et la puissance sont 2 notions qui, bien que liées sont différentes. Afin de comprendre cette différence, observons la grue ci-contre. Pour lever la charge de masse M soumise à son poids P, il faut fournir une certaine quantité d'énergie (c'est le travail généré par la force : W).

Remarquons que quelque soit la vitesse de levage de la charge, la quantité totale d'énergie à fournir est toujours la même. Plus la vitesse de levée de la charge est grande, plus la puissance fournie instantanément est grande.

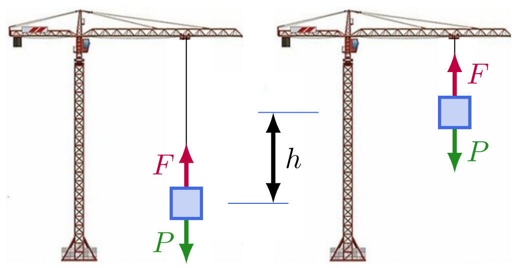


FIGURE 2 – Énergie, travail, puissance

2.1 Énergie ou travail

D'une façon générale, l'énergie ou le travail (en Joule) représente ce qu'il faut fournir à un système pour l'amener d'un état initial à un état final. La manière dont le chemin est parcouru entre les 2 états n'a pas d'importance.

2.2 Puissance

Elle caractérise le débit d'énergie fourni à chaque instant (instantanément) entre l'état initial et l'état final. Elle ne dépend ni de l'état initial, ni de l'état final du système, mais permet de décrire les flux d'énergie entre ces deux états.

3 Travail d'une force au cours d'un déplacement élémentaire

3.1 Travail élémentaire

Soit une force $\overrightarrow{F}$ dont le point d'application M subit un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{M_0M_1}$.

On appelle travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$ au cours de son déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell}$ le produit scalaire :

$$\boxed{dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}}$$

avec :

- dW : travail élémentaire exprimé en Joule (J)
- F : force exprimée en Newton (N)
- $d\ell$: déplacement élémentaire, en mètre (m)

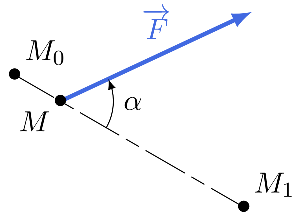


FIGURE 3 – Travail élémentaire de $\overrightarrow{F}$

Remarque

On peut constater que $dW = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \left\|\overrightarrow{d\ell}\right\| \cos\alpha$

3.2 Travail au cours du déplacement : énergie cinétique d'un point matériel M (dm)

Après intégration du travail élémentaire entre deux temps t_1 et t_2 on obtient la relation :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} dm\, \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2}$$

On note alors le travail $E_{c(M/R)}$ ou $T_{(M/R)}$ (énergie cinétique du point M dans son mouvement par rapport à R).

Démonstration :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Comme : $\dfrac{d\overrightarrow{\ell}}{dt} = \overrightarrow{V_{M\in S/R}}$ alors : $W = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\, dt$

En appliquant le PFD à M, de masse dm, on trouve : $\overrightarrow{F} = dm\, \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$

Comme : $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right]_R$ on a : $\overrightarrow{F} = dm \left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right]_R$

Alors : $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = dm \left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right]_R \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}$

Or : $\left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right]_R \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right)$ (Avec $\left(x^2(t)\right)' = 2x(t) \cdot x'(t)$)

Comme : $W = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dm \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) dt$

Soit : $W = dm \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) = \frac{1}{2} dm \int_{t_1}^{t_2} d\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right)$ (Conservation de la masse)

Et enfin : $\boxed{W = \frac{1}{2} dm \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2}$

Remarque

L'unité du système international pour mesurer l'énergie est le joule (J), autrement dit 1 Joule correspond à l'énergie nécessaire pour déplacer 1 N sur 1 m (avec $\alpha = 0°$)

Il existe par ailleurs d'autres unités :

- l'électronvolt ($1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$)
- le kilowattheure ($1\,\text{kWh} = 3{,}6\,\text{MJ}$)
- la calorie (4,18 J)
- la Calorie (alimentaire : 4180 J ; notez-là, le C capitale).

4 Énergie cinétique d'un point matériel

La relation fondamentale de la dynamique, obtenue au chapitre précédent s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$$

avec $\sum \vec{F}$ la résultante des forces appliquées au point matériel. Elle comprend les forces d'inertie dans le cas d'un référentiel non galiléen. En effectuant le produit scalaire par la vitesse $\vec{v}$ du point, il vient :

$$m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \vec{v} = \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \vec{v}$$

On peut écrire :$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$. De cette façon nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum(\vec{F} \cdot \vec{v})$$

On reconnait dans le membre de gauche la quantité $\mathrm{E}_c \equiv \frac{1}{2}mv^2$ qu'on nomme *énergie cinétique du point matériel*, et dont la dérivée par rapport au temps est égale à la somme des puissances $\vec{F} \cdot \vec{v}$ des forces appliquées au point.

On peut obtenir une expression plus générale en remarquant que $\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}$, puisque $\mathrm{d}\left(v^2\right) = 2\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}$. En introduisant la variation infinitésimale de la quantité de mouvement du corps $\mathrm{d}\vec{p} \equiv m\,\mathrm{d}\vec{v}$, on obtient :

$$\Delta\mathrm{E}_c = \int \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{p}$$

où $\Delta\mathrm{E}_c$ désigne la variation d'énergie cinétique.

Remarque

Voilà, le chapitre pourrait presque s'arrêter là. Vous venez, pour un point matériel, d'écrire et démontrer le Théorème de l'énergie cinétique appliqué à une masse ponctuelle m. La suite du cours permet de généraliser cela à un solide.

5 Énergie cinétique d'un solide

5.1 Expression générale

Définition *Énergie cinétique d'un solide*

Considérons un solide comme un ensemble de points matériels, on peut écrire :

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2 \, dm$$

Propriété

L'énergie cinétique d'un solide dans son mouvement est donnée par le relation suivante :

$$\boxed{E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{C}_{S/R}\}} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}\end{array}\right\}_A$$

Soit par définition du comoment : $\boxed{E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}}$

Attention

Pour le calcul du comoment, les torseurs doivent être exprimés **au même point** !

Démonstration :

Considérant qu'un solide est un ensemble de points matériels, on peut écrire :

$$E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2 \, dm$$

Soit A un point du solide S :

$$2\,E_{c(S/R)} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) dm \qquad \text{(Champs des vecteurs vitesses)}$$

$$2\,E_{c(S/R)} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\, dm + \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) dm \qquad \text{(Distributivité)}$$

$$2\,E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\, dm + \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) dm \qquad (A \text{ fixe sur } S)$$

Or :

$$\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) dm = \int_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}} \wedge \overrightarrow{MA}\right) dm \qquad \text{(Produit mixte)}$$

$$\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) dm = \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right) dm$$

On obtient alors :

$$\boxed{2\,E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}} \qquad \text{(ident. de } \overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R}\}} \text{ et } \overrightarrow{M_A\{\mathcal{C}_{S/R}\}}\text{)}$$

Remarque

L'Énergie cinétique est un **SCALAIRE**, sa valeur ne dépend donc pas du point d'écriture. À vous de choisir judicieusement !

Démonstration :

On a : $2\,E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}$

Soit un point B. On a, avec la formule des champs de moments pour $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}$:

$$2\,E_{c(S/R)} = \left(\overrightarrow{V_{B\in S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\sigma_{B\in S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)$$

En développant :

$$2\,E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}\right)}_{\overrightarrow{0}}$$

$$2\,E_{c(S/R)} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R}}$$

On retrouve bien : $\boxed{2\,E_{c(S/R)} = \left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\}_B \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\}_B}$

5.2 Cas particuliers

Dans cette section, quelques cas particuliers d'écriture de l'énergie cinétique. Dans quasiment tous les sujets, vous n'aurez pas à écrire le comoment !!!

5.2.1 A est fixe dans R

$$\boxed{E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}$$

Démonstration :

On a : $E_{c(S/R)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}}$ (car $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{0}$)

Avec : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R}} = \left(\bar{\bar{I}}_{(A,S)} . \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \underbrace{\overrightarrow{V_{A\in S/R}}}_{\overrightarrow{0}}$

5.2.2 A confondu avec G (centre d'inertie) - *Cas particulier du théorème de Köning*

$$\boxed{E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} m\, \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(G,S)} . \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}$$

Démonstration :

On a : $2\,E_{c(S/R)} = \left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\}_G \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\}_G$ (Définition)

Soit : $2\,E_{c(S/R)} = \underbrace{\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \cdot m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}_{m\cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\sigma_{G\in S/R}}}_{\bar{\bar{I}}_{(G,S)} . \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

5.2.3 Solide en translation

$$\boxed{E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} m\, \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2}$$

5.2.4 Solide en rotation autour d'un axe fixe

En considérant un solide S en rotation autour de l'axe $\overrightarrow{z}$, et en posant J le moment d'inertie de S autour de l'axe $\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega . \overrightarrow{z}$:

$$\boxed{E_{c(S/R)} = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

5.3 Cas d'un ensemble de solides

Pour avoir l'énergie cinétique d'un ensemble de solides $\Sigma = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$:

$$\boxed{E_{c(\Sigma/R)} = \sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)} = E_{c(S_1/R)} + E_{c(S_2/R)} + \cdots + E_{c(S_n/R)}}$$

6 Notion d'inertie équivalente en rotation par rapport à un axe

Définition *Inertie équivalente*

Dans le cas d'un ensemble E comportant plusieurs solides S_i en mouvement par rapport à R, on appelle inertie équivalente J_{eq} ramenée à un axe Δ(généralement l'arbre moteur), l'inertie que devrait avoir un solide en rotation autour de cet axe pour que son énergie cinétique soit égale à celle de l'ensemble des solides S_i :

$$\boxed{E_{c(\Sigma/R)} = \sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)} = \frac{1}{2} J_{eq\Delta}.\omega_{\Delta}^2}$$

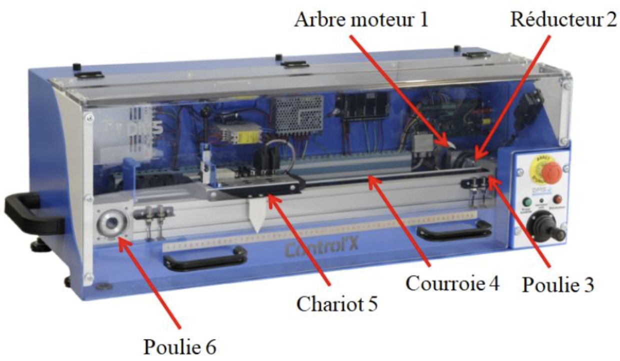
Intérêt :
L'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur permet d'estimer rapidement le dimensionnement d'un actionneur.

Remarque

De même, on peut définir une masse équivalente M_{eq}, la masse équivalente que devrait avoir le solide en translation pour que son énergie cinétique soit égale à celle de l'ensemble des solides S_i :

$$\boxed{E_{c(\Sigma/R)} = \sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)} = \frac{1}{2} M_{eq} V_T^2}$$

Exemple de calcul d'inertie équivalente sur le Comax



Pièce	Caractéristiques
1	Moment d'inertie : J_1
2	Moment d'inertie ramenée sur l'arbre d'entrée : J_2 Rapport de réduction : $r < 1$
3	Moment d'inertie : J_3 Rayon : R_p
4	Masse négligée
5	Masse : M_5
6	Moment d'inertie : J_6 Rayon : R_p

On calcule l'énergie cinétique de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$Ec_{E/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} + Ec_{3/0} + Ec_{4/0} + Ec_{5/0} + Ec_{6/0}$$
$$Ec_{E/0} = \frac{1}{2} J_1 \omega_{1/0}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{1/0}^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_{3/0}^2 + \frac{1}{2} M_5 V_{5/0}^2 + \frac{1}{2} J_6 \omega_{6/0}^2$$

Le mécanisme possède une seule mobilité utile donc il existe des relations entre les différentes inconnues cinématiques. Il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique du système matériel E en fonction d'une seule de ces inconnues cinématiques :

- généralement soit la variable d'entrée : $Ec_{E/0} = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_{1/0}^2$
- généralement soit la variable de sortie : $Ec_{E/0} = \frac{1}{2} M_{eq} V_{5/0}^2$

On va calculer J_{eq} :

On a $\omega_{3/0} = r\omega_{1/0}, \omega_{6/0} = \omega_{3/0}$ et $V_{5/0} = R_p \omega_{3/0} = R_p r \omega_{1/0}$.

Donc

$$Ec_{E/0} = \frac{1}{2} J_1 \omega_{1/0}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{1/0}^2 + \frac{1}{2} J_3 \left(r\omega_{1/0}\right)^2 + \frac{1}{2} M_5 \left(R_p r \omega_{1/0}\right)^2 + \frac{1}{2} J_6 \left(r\omega_{1/0}\right)^2$$
$$Ec_{E/0} = \frac{1}{2} \left(J_1 + J_2 + J_3 r^2 + M_5 R_p^2 r^2 + J_6 r^2\right) \omega_{1/0}\Big)^2$$
$$Ec_{E/0} = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_{1/0}^2$$

D'où par identification :

$$J_{eq} = J_1 + J_2 + J_3 r^2 + M_5 R_p^2 r^2 + J_6 r^2$$

On peut remarquer que les inerties des solides "derrières" le réducteur "vues" par le moteur sont fortement diminuées de par le rapport de réduction.

Remarque

Ce type de question **TOMBERA** forcément aux concours...

7 Puissance

7.1 Présentation

La puissance est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. Cela correspond donc à un débit d'énergie : deux systèmes de puissances différentes pourront fournir le même travail (la même énergie), mais le système le plus puissant sera le plus rapide.

La puissance échangée entre deux éléments s'exprime, indépendamment du domaine considéré, comme **le produit de deux variables complémentaires** :

- une *variable d'effort*, notée en général e, qui **"tend" à déplacer une certaine quantité de matière** (ou quelque chose qui en tient lieu)
- une *variable de flux*, notée en général f, qui **traduit le déplacement avec un certain "débit" d'une quantité de matière** (ou quelque chose qui en tient lieu)

Domaine	Effort e	Flux f
Mécanique de translation	Force $F(N)$	Vitesse v(m/s)
Mécanique de rotation	Couple $C(N.m)$	Vitesse angulaire ω(rad/s)
Électricité	Tension $u(V)$	Courant $i(A)$
Hydraulique, pneumatique	Pression $P(Pa)$	Débit volumique Q_V (m^3/s)
Thermodynamique, thermique	Température $T(K)$	Flux d'entropie $\dot{S}$(J/(K.s))

Propriété

La puissance est un **scalaire et** elle s'exprime dans le S.I. en watt, noté W, qui correspond à un joule fourni par seconde $\left(\mathrm{J.s^{-1}} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}\right)$.

Remarque

On utilise encore le cheval vapeur dans le cas des moteurs thermiques : $1\,\mathrm{cv} \approx 736\,\mathrm{W}$.

7.2 Cas d'un point matériel

Soit un point M de vitesse $\overrightarrow{V_{M/R}}$ par rapport à un référentiel R et sur lequel agit une «force» $\vec{F}$. On appelle puissance développée par la force $\vec{F}$ agissant sur M l'expression : $P_{\vec{F}\to M/R} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{V_{M/R}}$.

7.3 Cas général d'une action mécanique

Soit une action mécanique extérieure $\bar{S}$ sur un solide S. Cette action mécanique est définie en tout point $M \in S$ à l'aide d'une force élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F_{\bar{S}\to S}}$ de moment nul en M (c'est un glisseur). Le mouvement de S par rapport au référentiel R est connu. La puissance mécanique développée par cette action dans le mouvement de S par rapport au référentiel R est :

$$P_{\bar{S}\to S/R} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}F_{\bar{S}\to S}(M)}$$

Le champ de force élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F_{\bar{S}\to S}(M)}$ peut être du à :

- la pesanteur
- l'action d'un fluide
- l'action de contact d'un solide

7.4 Puissance développée par une action extérieure à un solide S

7.4.1 Expression générale

Le mouvement d'un solide S par rapport au référentiel R est connu et défini par le torseur cinématique : $\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\}$ et le torseur associé à l'action mécanique (d'origine quelconque) de $\bar{S}$ sur le solide S est noté $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}$ on montre que la puissance développée sur S par le torseur $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}$ dans son mouvement par rapport à R est :

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}\otimes\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\}} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}}\\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}}\end{array}\right\}\otimes{}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right\}$$

Soit :

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}}\cdot\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

Démonstration :

Déterminons la puissance développée par une force élémentaire $\overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}}$ extérieure à un ensemble matériel (S). Par définition, la puissance développée, à la date t, par $\overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}}$ dans le mouvement de (S) par rapport à R est : $dP_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}$.

On a alors la puissance développée par $\bar{S}$, action mécanique extérieure à un solide (S) :

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}}}$$

Soit A un point de S : $P_{\bar{S}\to S/R} = \int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} \cdot \left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)$

Comme A est fixe sur S et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ ne dépend pas du point d'écriture, on peut écrire, en utilisant les propriétés du produit mixte :

$$P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} + \int_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$$

$$P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \left(\overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$$

$$P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}}\right)$$

Comme : $\int_S \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}}$ et : $\int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{\bar{S}\to S}}\right) = \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}}$

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

Attention

Ne pas confondre avec l'énergie cinétique !!!

Remarque

La puissance exprimée n'a de sens que par rapport à un repère. Ainsi la puissance développée par l'action mécanique extérieure $\bar{S}$ sur S est nulle dans tout repère lié à (S).

7.4.2 Cas particuliers

- Lorsque le torseur d'actions mécaniques est un **glisseur**, la puissance est :

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{R\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}}} \iff \boxed{P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V}}$$

- Lorsque le torseur d'actions mécaniques est un **torseur couple**, la puissance est :

$$\boxed{P_{\bar{S}\to S/R} = \overrightarrow{M_A\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}} \iff \boxed{P = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{\omega}}$$

7.5 Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels (puissance des inter-efforts)

La puissance développée par les actions mutuelles entre deux systèmes matériels (E_1) et (E_2) (ou puissance des inter-efforts entre (E_1) et (E_2)) est :

$$\boxed{P_{E_1 \leftrightarrow E_2} = P_{E_1 \to E_2/R} + P_{E_2 \to E_1/R}}$$

On montre aisément que :

$$\boxed{P_{E_1 \leftrightarrow E_2} = \{\mathcal{T}_{E_1 \to E_2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{E_2/E_1}\}}$$

Propriété

La puissance développée par les actions mutuelles entre (E_1) et (E_2) est indépendante du repère R.

Démonstration :

On a : $P_{E_2 \to E_1/R} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2 \to E_1}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in E_1/R}}$ et : $P_{E_2 \to E_1/R_1} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2 \to E_1}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in E_1/R_1}}$

D'où : $P_{E_2 \to E_1/R} - P_{E_2 \to E_1/R_1} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2 \to E_1}} \cdot \left(\overrightarrow{V_{M \in E_1/R}} - \overrightarrow{V_{M \in E_1/R_1}}\right)$

Comme : $\overrightarrow{V_{M \in E_1/R}} = \overrightarrow{V_{M \in E_1/R_1}} + \overrightarrow{V_{M \in R_1/R}}$ on a : $\overrightarrow{V_{M \in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{M \in E_1/R}} - \overrightarrow{V_{M \in E_1/R_1}}$ d'où :

$$P_{E_2 \to E_1/R} - P_{E_2 \to E_1/R_1} = \int_S \overrightarrow{dF_{E_2 \to E_1}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in R_1/R}}$$

$$P_{E_2 \to E_1/R} - P_{E_2 \to E_1/R_1} = \{\mathcal{T}_{E_2 \to E_1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$$

Par analogie :

$$P_{E_1 \to E_2/R} - P_{E_1 \to E_2/R_1} = \{\mathcal{T}_{E_1 \to E_2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$$

$$P_{E_2 \to E_1/R} - P_{E_2 \to E_1/R_1} + P_{E_1 \to E_2/R} - P_{E_1 \to E_2/R_1} = [\{\mathcal{T}_{E_1 \to E_2}\} + \{\mathcal{T}_{E_2 \to E_1}\}] \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$$

Or : $\{\mathcal{T}_{E_1 \to E_2}\} = \{\mathcal{T}_{E_2 \to E_1}\}$ (principe des actions réciproques)

$$P_{E_2 \to E_1/R} - P_{E_2 \to E_1/R_1} + P_{E_1 \to E_2/R} - P_{E_1 \to E_2/R_1} = \{0\} \otimes \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}$$

$$P_{E_2 \to E_1/R} - P_{E_2 \to E_1/R_1} = 0$$

$$\boxed{P_{E_2 \to E_1/R} = P_{E_2 \to E_1/R_1}}$$

À retenir

- Si la puissance est négative, c'est une puissance perdue par frottement.
- Si la liaison entre S_1 et S_2 est parfaite alors $P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = 0$
- La puissance s'exprime en Watt (W), correspondant à des $\text{J.s}^{-1} = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$

7.6 Calcul de la puissance pour des cas "classiques"

7.6.1 Puissance de l'effort stator → rotor - Cas d'un moteur

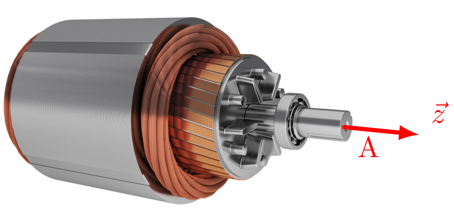


FIGURE 4 – Soit R le référentiel attaché au bâti.

La puissance s'écrit :

$$P_{sta\to rot/R} = \{\mathcal{T}_{sta\to rot}\} \otimes \{\mathcal{V}_{rot/R}\}$$

avec :

$$\{\mathcal{T}_{sta\to rot}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m\cdot\vec{z} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{rot/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_{rot}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{P_{sta\to rot/R} = C_m\cdot\omega_{rot}}$$

7.6.2 Puissance de l'effort liquide(huile) → piston - Cas d'un vérin

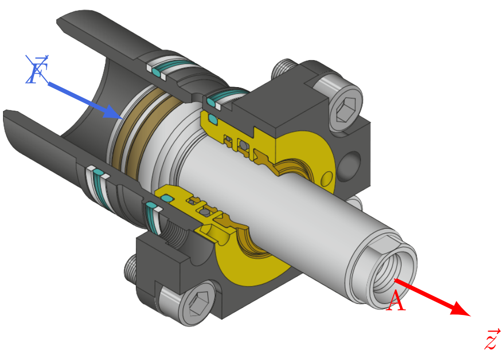


FIGURE 5 – Soit R le référentiel attaché au bâti.

La puissance s'écrit :

$$P_{hui\to pis/R} = \{\mathcal{T}_{hui\to pis}\} \otimes \{\mathcal{V}_{pis/R}\}$$

avec :

$$\{\mathcal{T}_{hui\to pis}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \mathrm{p}S\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{pis/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \omega_{pis}\vec{z} \\ V_{pis/R}\,\vec{z} \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{P_{hui\to pis/R} = \mathrm{p}S\cdot V_{pis/R} = \mathrm{p}Q}$$ avec Q le débit

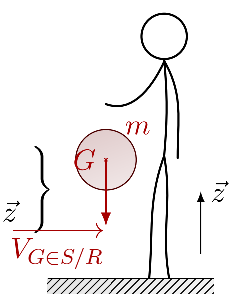
7.6.3 Puissance de la pesanteur → masse - Cas d'une chute libre

La puissance s'écrit :

$$P_{pes\to S/R} = \{\mathcal{T}_{pes\to S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$$

avec :

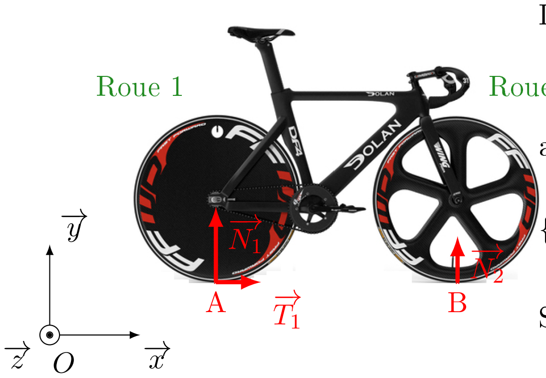
$$\{\mathcal{T}_{pes\to S}\} = {}_G\begin{Bmatrix} -m\,g\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{S/R}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{G\in S/R}} = -V\,\vec{z} \end{Bmatrix}$$



Soit :

$$\boxed{P_{pes\to S/R} = m\,g\,V}$$

7.6.4 Puissance de l'effort sol → roue - Cas du roulement sans glissement



La puissance s'écrit :

$$P_{sol\to 1/R} = \{\mathcal{T}_{sol\to 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/R}\}$$

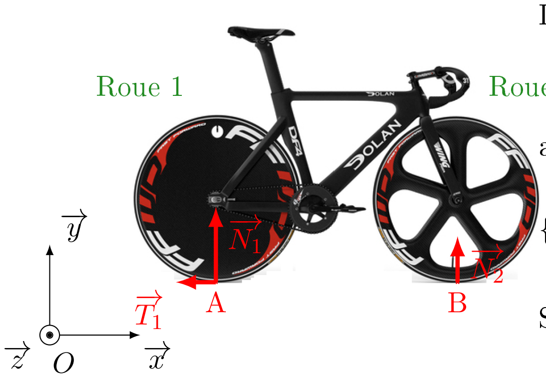
avec :

$$\{\mathcal{T}_{sol\to 1}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} N_1\vec{y} + T_1\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/R}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -\omega_1\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Soit :

$$\boxed{P_{sol\to 1/R} = 0}$$

7.6.5 Puissance de l'effort sol → roue - Cas du roulement AVEC glissement



La puissance s'écrit :

$$P_{sol\to 1/R} = \{\mathcal{T}_{sol\to 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/R}\}$$

avec :

$$\{\mathcal{T}_{sol\to 1}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} N_1\vec{y} - T_1\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/R}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -\omega_1\vec{z} \\ V_{gliss}\vec{x} \end{array} \right\}$$

Soit :

$$\boxed{P_{sol\to 1/R} = -T_1V_{gliss} = -fN_1V_{gliss}}$$

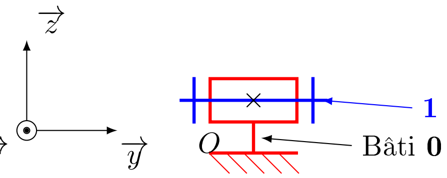
7.6.6 Puissance des inter-efforts - Cas de la liaison parfaite

La puissance s'écrit :

$$P_{1\leftrightarrow 0} = \{\mathcal{T}_{0\to 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

avec :

$$\{\mathcal{T}_{1\to 0}\} = {}_0\left\{ \begin{array}{c} X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z} \\ L_1\vec{x} + \vec{0} + N_1\vec{z} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \omega_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$



Soit :

$$\boxed{P_{1\leftrightarrow 0} = 0}$$

On retrouve bien, **pour une liaison parfaite la puissance dissipée est nulle**.

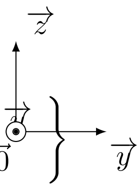
7.6.7 Puissance des inter-efforts - Cas de la liaison NON-parfaite

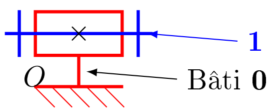
La puissance s'écrit :

$$P_{1\leftrightarrow 0} = \{\mathcal{T}_{0\to 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

avec :

$$\{\mathcal{T}_{1\to 0}\} = {}_{0}\left\{ \begin{array}{c} X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z} \\ L_1\vec{x} + M_1\vec{y} + N_1\vec{z} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \omega_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$





Soit :

$$\boxed{P_{1\leftrightarrow 0} = M_1\,\omega_1}$$

Ce terme algébrique est négatif. En effet, l'action due au frottement de 1 sur 0 s'oppose au mouvement de 1 par rapport à 0 (Modèle de Coulomb). Donc, dans le cas présent :

- si $\omega_1 > 0$ alors $L_1 < 0$
- si $\omega_1 < 0$ alors $L_1 > 0$

Dans une liaison réelle, la puissance des actions mutuelles de contact entre deux solides est négative : on dira que la puissance est « absorbée » par la liaison.

Debrief.

Propriété

Lorsque la puissance est motrice (puissance d'un moteur en phase motrice, d'un vérin, du poids (si le poids est dans le sens du mouvement), ...), elle est positive.

Lorsque la puissance est réceptrice (puissance due aux frottements, puissance d'un moteur en phase de freinage, du poids (si le poids est dans le sens opposé au mouvement), ...), elle est négative.

8 Théorème de l'Énergie Cinétique

8.1 Pour un solide

Le Théorème de l'Énergie Cinétique, appelé parfois Théorème Énergie/Puissance ou Théorème de la Puissance Cinétique s'énonce comme suit :

$$\boxed{\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R}}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures au solide.

Démonstration :

D'après le PFD : $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$

Et : $P_{\bar{S}\to S/R} = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$ Définition de la puissance

Posons B tel que :

$$B = \{\mathcal{D}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm \end{array} \right\} \otimes {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array} \right\}$$

$$B = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm$$

$$B = \int_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm \qquad (A \text{ fixe sur } S)$$

En utilisant le champ des vecteurs vitesses : $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in S/R}} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ on a :

$$B = \int_S \left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm$$

$$B = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm + \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, et en sachant que $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ ne dépend pas du point d'écriture :

$$B = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm + \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} \wedge \overrightarrow{AM}\, dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm}_{0}$$

D'où : $B = \displaystyle\int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}\, dm$

$$B = \int_S \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\right) dm \qquad \left(\text{car } \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right)\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(2\,E_{c(S/R)}\right) = \frac{d}{dt}\left(E_{c(S/R)}\right) \qquad \left(\text{Déf. de l'}E_c : 2\,E_{c(S/R)} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R}}^2\, dm\right)$$

On en déduit alors le Théorème de l'Énergie Cinétique : $\dfrac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R}$

8.2 Pour un ensemble de solides

Soit un ensemble (E) de n solides S_1, S_2,. . .,S_n. Pour un solide S_i de (E), le Théorème de l'Énergie Cinétique s'écrit :

$$\boxed{\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R}}$$

Alors pour n solides on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} E_{c(S_i/R)}\right) = \sum_{i=1}^{n} P_{\bar{S_i}\to S_i/R}}$$

- Le premier membre correspond à l'Énergie Cinétique de l'ensemble (E).
- Le second membre correspond à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à **CHAQUE** solide, c'est à dire à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à

l'ensemble (E) **PLUS** la somme des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E).

On peut alors écrire :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{c(E/R)}\right) = P_{\bar{E}\to E/R} + \sum_{i,j=1}^{n} P_{S_i\leftrightarrow S_j}}$$

Sous forme intégrale - Notion de travail

En général le théorème de l'énergie cinétique s'utilise sous la forme vue précédemment. Toutefois dans certaines applications il est intéressant de l'utiliser sous forme intégrée.

Pour un ensemble E de n solides, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R_g, et entre les instants t_1 et t_2 on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E_{c(E/R_g)}}{\mathrm{d}t} = P_{\bar{E}\to E/R_g} + \sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} P_{S_i\leftrightarrow S_j}$$

$$E_{c(E/R_g)}(t_2) - E_{c(E/R_g)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P_{\bar{E}\to E/R_g}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} P_{S_i\leftrightarrow S_j}\,\mathrm{d}t$$

$$E_{c(E/R_g)}(t_2) - E_{c(E/R_g)}(t_1) = W_{t_1}^{t_2}\left(\bar{E}\to E/R_g\right) + \sum_{i,j=1}^{n} W_{t_1}^{t_2}(S_i\leftrightarrow S_j)$$

Avec :

- $\Delta E_{c(E/R_g)} t_1 \to t_2$ la variation d'énergie cinétique de l'ensemble E entre les instants t_1 et t_2
- $W_{t_1}^{t_2}\left(\bar{E}\to E/R_g\right)$ le travail des actions mécaniques extérieures entre les instants t_1 et t_2 ;
- $\sum_{i,j=1}^{n} W_{t_1}^{t_2}\left(S_i\leftrightarrow S_j\right)$ le travail des actions mécaniques intérieures entre les instants t_1 et t_2.

9 Notion de rendement

Pour tout mécanisme, il y a possibilité de « pertes » d'énergie. Cette énergie est dite perdue, ou dégradée, car elle est sous une forme non exploitable par le système, comme la chaleur dissipée par des frottements. En conséquence, quand on fournit une quantité d'énergie à un mécanisme de conversion ou d'adaptation d'énergie, seule une partie sera utilisable en sortie.

9.1 Cas général

De manière générale, le rendement d'un système est le rapport de l'énergie utile (restituée) sur l'énergie fournie au système :

$$\boxed{\eta = \frac{E_{\mathrm{u}}}{E_{\mathrm{fournie}}} \leq 1}$$

Remarque

Le rendement est un nombre compris entre 0 et 1, et peut s'exprimer sous la forme d'un pourcentage.

Si on connait E_{perdue} l'énergie perdue par le système, on peut alors écrire :

$$\eta = \frac{E_{\text{fournie}} - E_{\text{perdue}}}{E_{\text{fournie}}} = 1 - \frac{E_{\text{perdue}}}{E_{\text{fournie}}}$$

9.2 En régime établi

En régime établi, on peut se permettre de raisonner en terme de puissance. Les expressions précédentes deviennent alors :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\text{u}}}{P_{\text{fournie}}}}$$

Si on connait P_{perdue} la puissance perdue par le système, on peut alors écrire :

$$\eta = \frac{P_{\text{fournie}} - P_{\text{perdue}}}{P_{\text{fournie}}} = 1 - \frac{P_{\text{perdue}}}{P_{\text{fournie}}}$$

10 Discussion Importante

Le théorème de l'énergie cinétique n'apporte pas d'équation supplémentaire à celles fournies par le PFD, il s'agit d'une équation scalaire combinaison des précédentes. Il est particulièrement bien adapté pour trouver la loi de mouvement pour les systèmes présentant une seule mobilité : Maxpid, axe seul de la plate-forme 6 axes, axe Emericc, axe du lacet du robot Ericc 3, ...

Cependant, le théorème de l'énergie cinétique ne permet pas de modéliser les effets gyroscopique et d'inertie.

Méthodologie

Comme pour le PFS ou le PFD, on peut proposer la méthode suivante pour appliquer le TEC.

1. Déterminer « ce que l'on cherche ? »
2. Proposition d'une méthode : liste de pièces à isoler en fonction de ce que l'on cherche. Dans les faits, en PSI, on isole et on applique le TEC à **l'ensemble des pièces en mouvement par rapport à un référentiel galiléen**.
3. Pour chaque pièce isolée ou ensemble de pièces isolées :
   (a) Calcul de l'énergie cinétique de l'ensemble isolé
   (b) Calcul des puissances extérieures non nulles
   (c) Calcul des puissances intérieures non nulles
   (d) Écriture du TEC
4. Résolution globale