ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 23/01/2025

Devoir en temps libre n°12

Problème I

1. Le théorème spectral (sans « e » à la fin) est évidemment l'argument le plus efficace pour la diagonalisabilité de B. De même, le calcul de χ_{B} avec une opération pour se ramener à une configuration triangulaire est la démarche optimale pour la détermination de $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. Ceux qui optent pour la résolution de $\mathrm{BX} = \lambda \mathrm{X}$ avec λ réel et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ doivent justifier de l'existence de solutions $\mathrm{X} \neq 0$ pour en déduire λ valeur propre.

2. L'inégalité $\langle \mathrm{X}, \mathrm{MX} \rangle \leqslant \mathrm{Max}\,\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$ est à démontrer en détail (elle est mentionnée dans le cours avec la mention **à savoir refaire**).

3. Il faut procéder en <u>deux</u> temps pour la majoration de $\underset{\mathrm{X}\in \mathrm{S}(0,1)}{\mathrm{Sup}} (\langle \mathrm{X}, \mathrm{BX}\rangle + \langle \mathrm{X}, \mathrm{DX}\rangle)$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, exactement comme pour l'inégalité triangulaire de la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ ou $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$.

Problème II

1. Des rédactions très maladroites et parfois même très fausses dans certaines copies. La bonne approche consiste à observer la compacité de $\mathcal{B}_n$ en montrant qu'il s'agit d'un fermé borné en dimension finie. La fermeture est rarement bien établie.

2. Ne pas omettre de citer la propriété fondamentale de la trace. Confusion pour certains sur le bon usage de cette propriété.

3. Assez bien réussie malgré quelques rédactions très lourdes (développer le carré de la norme n'est pas très heureux).

4. Lire le sujet pour ne pas répondre qu'à la moitié de la question !

5. Bien réussie.

Problème III (bonus)

À peine un tiers de la classe a cherché ce problème alors que les deux premières questions sont très abordables et servaient de prétexte à faire une synthèse de résultats classiques : compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, existence d'une racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, fermeture de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Il faut utiliser (et montrer) la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2. Il faut utiliser plusieurs résultats auxiliaires, classiques, mais à redémontrer à chaque fois. L'unicité de la racine carrée dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas utile ici.

3, 4. Bien réussies.