Feuille d'exercices n°64

Exercice 1 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$ admet une espérance finie puis la calculer.

Corrigé : Par transfert, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{X}+1} \text{ d'espérance finie } &\iff \sum \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) \text{ converge absolument}\\ &\iff \sum \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \text{ converge absolument}\end{aligned}$$

La famille étant à termes positifs, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right) < +\infty$$

Ainsi $\boxed{\text{La variable } \dfrac{1}{\mathrm{X}+1} \text{ est d'espérance finie avec } \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}\right) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.}$

Remarque : Pour justifier que la variable $\dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$ est d'espérance finie, on peut aussi observer que celle-ci est bornée.

Exercice 2 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires dans L^2. On note la matrice des covariances $\Sigma = \left(\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer

$$\Sigma \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Corrigé : L'ensemble L^2 possède une structure d'espace vectoriel et par linéarité de l'espérance, la forme

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathbb{E}(\mathrm{Y}))\right)$$

est bilinéaire symétrique sur cet espace. Pour $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve

$$\mathrm{U}^\top \Sigma \mathrm{U} = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}_i, \sum_{j=1}^n u_j \mathrm{X}_j\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n u_i \mathrm{X}_i\right) \geqslant 0$$

Par caractérisation d'une matrice positive, on conclut

$$\boxed{\Sigma \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

Exercice 3 (*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ et les $\lambda_i > 0$. Déterminer, de deux manières différentes, la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Corrigé : On a $G_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(t-1)}$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ et $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par indépendance des X_i, notant $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-1)} = e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $S_n \sim \mathscr{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$. On peut procéder par récurrence sur n. Considérons X et Y variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. On a $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis pour n entier, il vient par probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n}{n!}\end{aligned}$$

L'hérédité de la récurrence s'ensuit. On conclut

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)}$$

Exercice 4 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(X)$ sont dans L^1. Montrer

$$f(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(f(X))$$

Corrigé : La fonction f est convexe donc son graphe se situe au dessus de ses tangentes. En particulier, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geqslant f'(\mathbb{E}(X))(x - \mathbb{E}(X)) + f(\mathbb{E}(X))$$

d'où

$$f(X) \geqslant f'(\mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X)) + f(\mathbb{E}(X))$$

Passant à l'espérance, on conclut $\boxed{f(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(f(X))}$

Exercice 5 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p et q dans $]\,0\,;1\,[$. On note A la matrice aléatoire réelle définie par

$$\forall \omega \in \Omega \qquad A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

Déterminer $$\mathbb{P}(\text{A diagonalisable})$$

Corrigé : Soit $\omega \in \Omega$. La matrice $\mathrm{A}(\omega)$ est triangulaire donc son spectre se lit sur la diagonale avec

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}(\omega)) = \{\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega)\}$$

Si $\mathrm{X}(\omega) \neq \mathrm{Y}(\omega)$, d'après la condition suffisante de diagonalisation, il s'ensuit que $\mathrm{A}(\omega)$ est diagonalisable. Supposons ensuite $\mathrm{X}(\omega) = \mathrm{Y}(\omega)$. Si $\mathrm{A}(\omega)$ était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $\mathrm{X}(\omega)\,\mathrm{I}_2$ et serait donc égale à cette matrice (d'homothétie) ce qui n'est pas le cas. On a donc

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{A}(\omega) \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{X}(\omega) \neq \mathrm{Y}(\omega)$$

Autrement dit $\boxed{\{\mathrm{A} \text{ diagonalisable}\} = \{\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}\}}$

D'après ce qui précède, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ diagonalisable}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) \times \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$$

d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ diagonalisable}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \times q(1-q)^{n-1} = 1 - \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)} = 1 - \frac{pq}{p+q-pq}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A} \text{ diagonalisable}) = \dfrac{p+q-2pq}{p+q-pq}}$

Exercice 6 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\mathrm{Y}_n = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ pour tout n entier non nul.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k)$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
2. En déduire que pour n entier non nul, la variable aléatoire Y_n suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

Corrigé : 1. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_n > k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=k+1}^{+\infty} \{\mathrm{X}_n = \ell\}\right) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{\ell-1}$$

d'où $\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n > k) = p(1-p)^k \times \dfrac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k}$

Puis $$\{\mathrm{Y}_n > k\} = \{\min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) > k\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i > k\}$$

Comme les X_i sont indépendantes, il s'ensuit

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i > k) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^k$$

Ainsi $\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k) = (1-p)^{kn}}$

2. On a $\quad \{\mathrm{Y}_n = k\} = \{\mathrm{Y}_n > k-1\} \smallsetminus \{\mathrm{Y}_n > k\} \quad$ et $\quad \{\mathrm{Y}_n > k\} \subset \{\mathrm{Y}_n > k-1\}$

d'où

$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k-1) - \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n > k) = (1-p)^{(k-1)n} - (1-p)^{kn} = (1-p)^{(k-1)n}(1-(1-p)^n)$

On conclut

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathrm{Y}_n \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1-(1-p)^n.}$$

Exercice 7 (**)

Soit X variable aléatoire de L^2, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) \neq 0$.

1. Établir $$\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq 0) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X})$$
2. Établir $$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2}$$

Corrigé : Avec $\varepsilon = 1$, on a $\{\mathrm{X} \geqslant \varepsilon\} = \{\mathrm{X} \neq 0\}$. D'après l'inégalité de Markov, il vient

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq 0) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X})}$$

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X}\neq 0\}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{\{\mathrm{X}\neq 0\}}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq 0)$$

En remarquant l'égalité $\mathrm{X} = \mathrm{X}\mathbb{1}_{\{\mathrm{X}\neq 0\}}$, on obtient

Ainsi $$1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq 0) \geqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X})^2}{\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)}$$

Finalement $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2}}$$

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes d'espérance finie égale à μ. On pose

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{M}(\omega) = \big(\mathrm{X}_{i,j}(\omega)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit λ réel. Justifier que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ est une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie puis calculer $\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda))$.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $\det \mathrm{A} = \sum\limits_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$. Soit λ réel. On a

$$\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)$$

On en en déduit que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ est bien une variable aléatoire réelle discrète en tant que fonction de variables aléatoires réelles discrètes. Comme les $\mathrm{X}_{i,j}$ sont indépendantes et d'espérance finie, il s'ensuit que les variables aléatoires $\prod\limits_{i=1}^n \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)$ sont d'espérance finie et par combinaison linéaire, on obtient que $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)$ également. Par linéarité de l'espérance puis indépendance des $\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}$, il vient

$$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)\right] = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\lambda\delta_{i,\sigma(i)} - \mathrm{X}_{i,\sigma(i)}\right)$$

d'où, par linéarité $\qquad \mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda \delta_{i,\sigma(i)} - \mu\right) = \chi_{\mu \mathrm{J}}(\lambda)$

avec $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée de 1. Notant U la matrice colonne formée de 1, on a $\mathrm{JU} = n\mathrm{J}$ et $\mathrm{rg}\, \mathrm{J} = 1$ d'où $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{J}) = n-1$ et $n \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{J})$. Par conséquent, la matrice J est diagonalisable avec J semblable à $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$. On conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)) = \chi_{\mu \mathrm{J}}(\mathrm{M}) = \chi_{\mu \mathrm{D}}(\lambda) = (\lambda - n\mu)\lambda^{n-1}}$$

Exercice 9 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, n un entier non nul et $(\mathrm{X}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, on pose $\mathrm{Y}_i = \mathbb{1}_{\{\mathrm{X}_i = 0\}}$ puis on note

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$$

1. Préciser la loi des Y_i puis déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{U}_n)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{U}_n)$.
2. Établir $\qquad \mathbb{V}(\mathrm{U}_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}$
3. On définit φ sur $\mathbb{N}$ par
$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \varphi(j) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 0 | \mathrm{S}_n = j)$$
Déterminer une expression de $\varphi(j)$ pour $j \in \mathbb{N}$.
4. On pose $\mathrm{V}_n = \varphi(\mathrm{S}_n)$. Montrer que $\mathrm{V}_n \in \mathrm{L}^2$.
5. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n)$ et Comparer $\mathbb{V}(\mathrm{V}_n)$ à $\mathbb{V}(\mathrm{U}_n)$.

Corrigé : 1. Pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, la variable aléatoire $\mathrm{Y}_i = \mathbb{1}_{\{\mathrm{X}_i = 0\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) = \mathrm{e}^{-\theta}$. Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{U}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_i) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)$$

Les variables Y_i sont indépendantes comme fonctions de variables aléatoires indépendantes d'où

$$\mathbb{V}(\mathrm{U}_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{Y}_i) = \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{n}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,; n]\!] \qquad \mathrm{Y}_i \sim \mathscr{B}(\mathrm{e}^{-\theta}) \qquad \mathbb{E}(\mathrm{U}_n) = \mathrm{e}^{-\theta} \qquad \mathbb{V}(\mathrm{U}_n) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}(1 - \mathrm{e}^{-\theta})}{n}}$$

2. La fonction $t \in [\,0\,; 1\,] \mapsto t(1-t)$ admet un maximum en $t = \dfrac{1}{2}$ avec

$$\forall t \in [\,0\,; 1\,] \qquad t(1-t) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathbb{V}(\mathrm{U}_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}}$

3. Soit $j \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 0 | \mathrm{S}_n = j) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 0, \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = j)}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j)} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} \mathrm{X}_i = j)}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j)}$$

Les variables X_1 et $\sum_{i=2}^{n} X_i$ sont indépendantes comme fonctions de variables aléatoires indépendantes. De plus, une somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres (résultat classique, à savoir refaire) d'où $S_n \sim \mathscr{P}(n\theta)$ et $\sum_{i=2}^{n} X_i \sim \mathscr{P}((n-1)\theta)$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 | S_n = j) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} X_i = j)}{\mathbb{P}(S_n = j)} = \frac{e^{-\theta} \dfrac{((n-1)\theta)^j}{j!} e^{-(n-1)\theta}}{\dfrac{(n\theta)^j}{j!} e^{-n\theta}}$$

Après simplification, on obtient

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N} \qquad \varphi(j) = \mathbb{P}(X_1 = 0 | S_n = j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j}$$

4. On a
$$V_n = \varphi(S_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{S_n}$$

La variable V_n est bornée, à valeurs dans $[0;1]$ clairement, et par conséquent

$$\boxed{V_n \in L^2}$$

5. La variable V_n est dans L^2 et donc dans L^1 avec

$$\boxed{\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((n-1)\theta)^k}{k!} e^{-n\theta} = e^{(n-1+n)\theta} = e^{-\theta}}$$

D'après la relation de König-Huygens, il vient

$$\mathbb{V}(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2$$

Puis
$$\mathbb{E}(V_n^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{(n-1)^2\theta}{n}\right)^k e^{-n\theta} = \exp\left[\frac{(n-1)^2\theta}{n} - n\theta\right] = e^{-2\theta} e^{\frac{\theta}{n}}$$

D'où
$$\boxed{\mathbb{V}(V_n) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right)}$$

Par concavité, pour $\alpha \in]0;1[$, il vient

$$\forall u \geqslant 0 \qquad \alpha(u-1) \geqslant u^\alpha - 1$$

En appliquant cette inégalité avec $\alpha = 1/n$ et $u = e^\theta$, on obtient

$$\frac{1}{n}\left(e^\theta - 1\right) \geqslant e^{\frac{\theta}{n}} - 1$$

Et en multipliant par $e^{-2\theta}$, on conclut

$$\boxed{\mathbb{V}(V_n) \leqslant \mathbb{V}(U_n)}$$

Commentaire : En statistique inférentielle, la variable aléatoire S_n est dite *exhaustive*. Si $(X_1, \ldots, X_n)$ représente notre observation, la variable S_n contient, d'une certaine manière, toute l'information de l'échantillon. La variable U_n fournit un estimateur simple de $e^{-\theta}$ mais la variable V_n obtenue par conditionnement par rapport à S_n fournit un estimateur de cette même quantité $e^{-\theta}$ (car $\mathbb{E}(V_n) = e^{-\theta}$) et plus performant car de variance inférieure. En un certain sens, le conditionnement équivaut à une projection orthogonale ce qui permet de construire un estimateur de variance minimale. On parle d'estimateurs *UVMB* : uniformément de variance minimum parmi les estimateurs sans biais.

Exercice 10 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires dans L^2 avec $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$ et $\mathbb{V}(\varepsilon_k) = \sigma^2$ pour k entier non nul.

1. Les variables $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ ne sont pas forcément indépendantes mais vérifient $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j$ si $|i-j| > 1$ avec i, j entiers non nuls. Établir

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. Généraliser ce résultat si les variables $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ vérifient $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j$ si $|i-j| > k$ avec k entier et i, j entiers non nuls

Corrigé : 1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on a pour n entier non nul

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right)$$

puis $$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(\varepsilon_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = n\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) \leqslant \sigma(\varepsilon_i)\sigma(\varepsilon_{i+1}) = \sigma^2$$

Ainsi $$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i) \leqslant n\sigma^2 + 2(n-1)\sigma^2 = \mathrm{O}(n)$$

On conclut $$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. On adapte avec

$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i) = n\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{n-k}\left[\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) + \ldots + \mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+k}\right] \leqslant n\sigma^2 + 2k(n-k)\sigma^2 = \mathrm{O}(n)$$

Le résultat suit.