ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°65

Exercice 1 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite d'événements. On note

$$\mathrm{A} = \text{« une infinité d'événements } \mathrm{A}_n \text{ est réalisée »}$$

1. Montrer que A est un événement.
2. Si la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ converge, montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.

   On suppose désormais les événements $(\mathrm{A}_n)_n$ indépendants.

3. Montrer $$\forall (n, \mathrm{N}) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)$$
4. On suppose que $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$.

Corrigé : 1. On a $\qquad \mathrm{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } \mathrm{A}_n\}$

Ainsi, l'ensemble A s'écrit
$$\mathrm{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant n} \mathrm{A}_k$$

Par stabilité par intersection et union dénombrables, il s'ensuit

$$\boxed{\text{L'ensemble A est un événement.}}$$

2. Par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant \mathrm{N}} \mathrm{A}_n\right)$$

et d'après l'inégalité de Boole
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant \mathrm{N}} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$$

le majorant étant le reste d'une série convergente donc de limite nulle. Par comparaison, il vient

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0}$$

3. Soit $(n, \mathrm{N}) \in \mathbb{N}^2$. On a par indépendance

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = \prod_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}_k}\right) = \prod_{k=n}^{\mathrm{N}} (1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_k))$$

Avec l'inégalité de convexité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$ pour tout x réel, on obtient

$$\boxed{\forall (n, \mathrm{N}) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right)}$$

4. Par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\mathrm{N}} \bar{\mathrm{A}}_k\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right)$$

et
$$\exp\left(-\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

puisque $\sum\limits_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ (série divergente à termes positifs). Par comparaison, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = 0$$

Une union dénombrable d'événements négligeables étant négligeable, il s'ensuit par continuité croissante

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_k}\right) = 0$$

Par complémentation, on conclut

$$\boxed{\text{Si la série } \sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \text{ diverge, alors on a } \mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1.}$$

Remarque : Ces résultats sont connus sous le nom de *lemmes de Borel-Cantelli*.

Exercice 2 (***)

Soit $s > 1$ et $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$ espace probabilisé tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ réel}$$

On pose
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Montrer que les événements $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.
3. Établir l'égalité $$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Corrigé : 1. Par σ-additivité, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}^*) = 1 = \lambda\zeta(s) \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Avec $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)} > 0$, on a bien $\mathbb{P}(\{n\}) \geqslant 0$ pour n entier et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ ce qui prouve que $\mathbb{P}$ définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Ainsi

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}}$$

2. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers distincts. En particulier, les p_i sont premiers entre eux et il vient

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{p_i} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \quad p_i \text{ divise } n\} = \left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \prod_{i=1}^{n} p_i \text{ divise } n\right\} = \mathrm{A}_{p_1 \ldots p_n}$$

Puis, pour p entier non nul, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_p) = \mathbb{P}\left(\{pk, k \in \mathbb{N}^*\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(pk)^s} = \frac{\lambda\zeta(s)}{p^s} = \frac{1}{p^s}$$

Ainsi
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{p_i}\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A}_{p_i})$$

Ce qui prouve $\boxed{\text{Les événements } (\mathrm{A}_p)_{p\in\mathcal{P}} \text{ sont indépendants.}}$

3. Le seul entier qui n'est divisible par aucun nombre premier est 1, autrement dit

$$\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{\mathrm{A}_p}$$

Notons $\mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. On sait que l'ensemble $\mathcal{P}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ donc dénombrable ce qui justifie la numérotation des nombres premiers. On a par continuité décroissante puis indépendance des A_p

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{1\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathrm{A}_{p_n}}\right) &= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\mathrm{N}} \overline{\mathrm{A}_{p_n}}\right) \\ &= \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}_{p_n}}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_{p_n})\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)\end{aligned}$$

D'où
$$\mathbb{P}\left(\{1\}\right) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Passant à l'inverse, on conclut $\boxed{\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}}$

Exercice 3 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose
$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{S_N}(\omega) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_k(\omega)$$

1. Justifier que $\mathrm{S_N}$ est une variables aléatoire discrète.
2. Montrer l'égalité $\mathrm{G}_{\mathrm{S_N}} = \mathrm{G_N} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$.
3. On suppose X_1 et N d'espérance finie. Montrer que $\mathrm{S_N}$ est d'espérance finie et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{S_N})$ en fonction de $\mathbb{E}(\mathrm{N})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$.
4. On suppose que $\mathrm{X}_1 \sim \mathscr{B}(p)$ et $\mathrm{N} \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $\mathrm{S_N}$.
5. Retrouver le résultat précédent sans passer par les fonctions génératrices.

Corrigé : 1. On a clairement $\mathrm{S_N}(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \{\mathrm{S_N} = k\} = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \left(\{\mathrm{N} = n\} \cap \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k\right\}\right)$$

et $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ est une variable aléatoire comme fonction du vecteur aléatoire $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Ainsi, pour k entier, l'ensemble $\{\mathrm{S_N} = k\}$ est une union dénombrable d'événements donc un événement ce qui prouve

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{S_N} \text{ est une variable aléatoire réelle discrète.}}$$

2. Soit $t \in [\,0\,;1\,]$. Par transfert puis probabilités totales avec le système complet $(\{\mathrm{N} = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et indépendances des X_k avec N, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{G_{S_N}}(t) &= \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k = j, \mathrm{N} = n \right) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k = j \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) \right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs et indépendance des X_k, on obtient

$$\mathrm{G_{S_N}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = j) \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t)^n \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{G_{S_N}} = \mathrm{G_N} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}}$$

3. On a $\mathrm{G_N}$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$ dérivable en 1. Comme $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) = 1$, on a donc $\mathrm{G_N} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}$ dérivable en 1 ce qui prouve que $\mathrm{S_N}$ est d'espérance finie et on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{S_N}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{S_N}}(1) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X}_1}(1)\mathrm{G}'_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(1) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X}_1}(1)\mathrm{G}'_{\mathrm{N}}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\text{La variable } \mathrm{S_N} \text{ est d'espérance finie et } \mathbb{E}(\mathrm{S_N}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)\mathbb{E}(\mathrm{N}).}$$

Remarque : La dernière égalité est appelée *identité de Wald.*

4. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{G_{S_N}}(t) = \mathrm{G_N}(\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t)) = \mathrm{G_N}(pt + 1 - p) = \mathrm{e}^{\lambda(pt+1-p-1)} = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S_N} \sim \mathscr{P}(p\lambda)}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $(\{\mathrm{N} = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k, \mathrm{N} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k, \mathrm{N} = n \right)$$

Les variables X_i et N sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$$

On a $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \sim \mathscr{B}(n, p)$ d'où $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k \right) = 0$ pour $n < k$ et par suite

$$\mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = k \right) \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-n}$$

D'où
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

Avec le changement d'indice $\ell = n-k$, on reconnaît une exponentielle

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S_N} = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{S_N} \sim \mathscr{P}(p\lambda)}$

Exercice 4 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$. Pour $c > \lambda$, montrer qu'il existe $r \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant r^n$$

Corrigé : Soit $t > 0$ et $n \geqslant 1$. Par croissance stricte de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, on a $\{\mathrm{S}_n \geqslant nc\} = \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tnc}\right\}$. La série $\sum \mathrm{e}^{tn}\dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\dfrac{(\mathrm{e}^{\,t}\lambda)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et par transfert, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{tn}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\,t}-1)}$$

La variable $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} = \prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}$ est d'espérance finie comme produit de variables indépendantes d'espérance finie. D'après l'inégalité de Markov avec la variable alétoire positive $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}$ et par égalité en loi des X_k, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{tnc}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tnc}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}\right) = \mathrm{e}^{-tnc}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}\right) = \mathrm{e}^{-tnc}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}\right)^n$$

Ainsi $\qquad \forall t > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant \exp(n\varphi(t)) \quad$ avec $\quad \varphi(t) = -tc + \lambda(\mathrm{e}^t - 1)$

D'après les théorèmes généraux, on a $\varphi \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et

$$\forall t > 0 \qquad \varphi'(t) = -c + \lambda\mathrm{e}^t < 0 \iff t < \ln\left(\frac{c}{\lambda}\right) \quad \text{avec} \quad \ln\left(\frac{c}{\lambda}\right) > 0$$

D'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant \exp\left[n\varphi\left(\ln\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right)\right]$$

Comme $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et que φ décroît strictement sur $\left]\,0\,;\ln\left(\dfrac{c}{\lambda}\right)\right[$, on en déduit

$$\varphi\left(\ln\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right) < 0$$

On conclut $\boxed{\exists r \in \,]\,0\,;1\,[\quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nc) \leqslant r^n}$

Variante : On peut aussi observer

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} -tc + \lambda\left(1 + t + \mathrm{o}(t) - 1\right) = t\left((\lambda - c) + \mathrm{o}(1)\right) \quad \text{avec} \quad \lambda - c < 0$$

On en déduit que la fonction φ prend des valeurs strictement négatives au voisinage de zéro ce qui permet de conclure.

Exercice 5 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie.

Montrer $$\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pourra commencer par le cas $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Corrigé : Soit $x > 0$. En s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Markov, on écrit

$$X \geqslant X\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}} \geqslant x\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}}$$

La variable $X\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}}$ est donc d'espérance finie avec

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}}) \geqslant x\mathbb{P}(X \geqslant x)$$

Supposons $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On a

$$0 \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}}) \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant \lfloor x \rfloor\}}) = \sum_{k=\lfloor x \rfloor}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

La série $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge et par conséquent, son reste est de limite nulle d'où

$$\sum_{k=\lfloor x \rfloor}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Et dans le cas particulier où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a donc prouvé

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On ne suppose plus désormais que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $X(\Omega)$ est fini, alors $X\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}}$ est nulle pour x assez grand et le résultat est trivial. Sinon, on note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Il vient

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant x\}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{1}_{[\,0\,;x_n\,]}(x)\mathbb{P}(X = x_n)$$

On pose $$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad u_n(x) = x_n \mathbb{1}_{[\,0\,;x_n\,]}(x)\mathbb{P}(X = x_n)$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\left]\,0\,;+\infty\,\right[$ puisqu'on a pour n entier $\|u_n\|_\infty = x_n\mathbb{P}(X = x_n)$, terme de série convergente du fait de l'espérance finie. Et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, par double limite, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$$

autrement dit $$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X \geqslant x}) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 6 (****)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de même loi. On pose

$$\forall (\omega, n) \in \Omega \times \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{R}_n(\omega) = \mathrm{Card}\ \{\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_n(\omega)\}$$

1. Établir $\qquad \forall (n, a) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{R}_n) = a + n\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a)$

2. En déduire que si X_1 est d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\sqrt{n})$.

Corrigé : 1. Soient a et n entiers. On a

$$\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} = \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \cap [\![0\,;\, a-1]\!] \sqcup \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \cap [\![a\,;\, +\infty [\![$$

d'où $\qquad \boxed{\mathrm{R}_n = \mathrm{Card}\ \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \cap [\![0\,;\, a-1]\!] + \mathrm{Card}\ \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \cap [\![a\,;\, +\infty [\![}$

On a $\qquad \mathrm{Card}\ \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \cap [\![0\,;\, a-1]\!] \leqslant a$

Puis $\qquad \mathrm{Card}\ \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \cap [\![a\,;\, +\infty [\![\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathrm{X}_k \geqslant a}$

Toutes les quantités étant finies, il vient par linéarité de l'espérance

$$\boxed{\forall (n, a) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \leqslant a + n\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant a)}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$, n entier non nul et $a = \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor$. On a

$$\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \leqslant \varepsilon\sqrt{n} + n\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1 \geqslant \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor\right)$$

Puis, pour n assez grand tel que $\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor > 0$, on a

$$n\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1 \geqslant \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor\right) = \frac{n}{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor \sum_{k=\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) \leqslant \frac{n}{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor} \sum_{k=\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k)$$

et $\qquad \sum\limits_{k=\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

en tant que reste de série convergente. Ainsi

$$n\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1 \geqslant \lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor\right) = \sqrt{n}\, \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\lfloor \varepsilon\sqrt{n} \rfloor}}_{=\mathrm{O}(1)} \mathrm{o}(1)$$

d'où $\qquad \mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \leqslant \sqrt{n}\,(\varepsilon + \mathrm{o}(1))$

et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\sqrt{n})}$$

Exercice 7 (***)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p avec $p \in]\,0\,;1\,[$. Pour n entier non nul, on note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

1. Montrer $\qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n > \dfrac{n}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \dfrac{n}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dans ce qui suit, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_n = \left\{\mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{n}{2p}\right\}$$

2. Montrer $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \dfrac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3. Établir $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{Arctan}\; x - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$

4. Montrer qu'il existe un réel ℓ à préciser tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|n\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n)\right) - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : 1. D'après la loi faible des grands nombres, il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \geqslant \frac{1}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Soit n entier non nul. On a

$$\left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \geqslant \frac{1}{2p}\right\} = \left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3n}{2p}\right\} \sqcup \left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{n}{2p}\right\}$$

Ainsi $\qquad 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \dfrac{n}{2p}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| \geqslant \dfrac{1}{2p}\right)$

et comme les événements $\left\{\mathrm{S}_n > \dfrac{n}{2p}\right\}$ et $\left\{\mathrm{S}_n \leqslant \dfrac{n}{2p}\right\}$ forment un système complet, on conclut

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \frac{n}{2p}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{Arctan}\,(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$, on dispose de $\mathrm{A} > 0$ tel que pour $x \geqslant \mathrm{A}$

$$\left|\mathrm{Arctan}\,(x) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$$

On décompose

$$\left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\} = \left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \sqcup \left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n \leqslant \frac{n}{2p}\right\}$$

Pour n assez grand, on a $\dfrac{n}{2p} \geqslant \mathrm{A}$ et par conséquent

$$\left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} = \varnothing$$

d'où $\qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \dfrac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$

Et on conclut $\qquad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \dfrac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

3. La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{Arctan}''(x)| = \frac{2|x|}{1+x^2}\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

puisqu'on a
$$\frac{2|x|}{1+x^2} \leqslant 1 \iff (|x|-1)^2 \geqslant 0$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{Arctan}\, x - x| \leqslant \frac{x^2}{2}}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n entier non nul, on a

$$\mathrm{C}_n = \left\{\left|n\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n)\right) - p\right| \geqslant \varepsilon\right\}$$

et on décompose
$$\mathrm{C}_n = (\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}_n) \sqcup (\mathrm{C}_n \cap \mathrm{B}_n)$$

d'où
$$\mathbb{P}(\mathrm{C}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}_n) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$$

Si $\mathrm{S}_n > 0$, on a

$$\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right)$$

puis
$$\left|\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right) - \frac{1}{\mathrm{S}_n}\right| \leqslant \frac{1}{2(\mathrm{S}_n)^2}$$

d'où
$$\left|n\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right) - \frac{n}{\mathrm{S}_n}\right| \leqslant \frac{n}{2(\mathrm{S}_n)^2}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}_n &= \left\{\left|n\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right) - p\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \\
&\subset \left\{\left|n\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right) - \frac{n}{\mathrm{S}_n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \cup \left\{\left|\frac{n}{\mathrm{S}_n} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\}
\end{aligned}$$

Puis, on a l'inclusion

$$\left\{\left|n\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right) - \frac{n}{\mathrm{S}_n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \subset \left\{\frac{n}{2(\mathrm{S}_n)^2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \subset \left\{\frac{2p^2}{n} \geqslant \varepsilon\right\}$$

et le dernier événement est vide pour n assez grand. Enfin, la fonction inverse est continue en $\dfrac{1}{p} > 0$ d'où, l'existence de $\eta > 0$ tel que pour $x > 0$

$$\left|x - \frac{1}{p}\right| < \eta \implies \left|\frac{1}{x} - p\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et par contraposition
$$\left|\frac{1}{x} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies \left|x - \frac{1}{p}\right| \geqslant \eta$$

Ainsi, on obtient
$$\left\{\left|\frac{n}{\mathrm{S}_n} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \mathrm{S}_n > \frac{n}{2p}\right\} \subset \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{p}\right| \geqslant \eta\right\}$$

On conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|n\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n)\right) - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$