ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°72

Exercice 1 (***)

On note $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \mathscr{C}^\infty([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. Soit n entier non nul. On considère le système différentiel

$$\mathrm{X}' = \mathrm{DX} + u(t)\mathrm{B} \qquad \text{(L)}$$

avec $\quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad u \in \mathrm{E}$

Le système est dit *contrôlable* si pour $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que la solution de (L) vérifiant $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0$ vérifie aussi $\mathrm{X}(1) = \mathrm{X}_1$.

1. Résoudre le système différentiel (L).
   Pour $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on note $\varphi_i(u)$ la valeur en $t = 1$ de la solution particulière de la i-ème ligne de (L) qui s'annule en zéro puis on pose $\Phi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$.
2. Justifier que $\varphi_i \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ pour $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ puis $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ équivaut à la liberté de la famille de F de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ avec $f_i : s \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i(1-s)}$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.
4. Montrer $\qquad \Phi$ surjective $\iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de liberté de $(f_1, \dots, f_n)$ portant sur les λ_i.
6. Conclure en déterminant une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour avoir (L) contrôlable.

Corrigé : 1. Par variation de la constante, on obtient

$$\boxed{\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad x_i(t) = \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} + \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_i(t-s)} u(s)\,\mathrm{d}s}$$

2. On a $$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \varphi_i(u) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda_i(1-s)} u(s)\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité du produit à droite et de l'intégrale, il s'ensuit

$$\boxed{\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \varphi_i \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}^n)}$$

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0 \iff \forall u \in \mathrm{E} \quad \int_0^1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i(1-s)} u(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

En choisissant $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, il vient par séparation de l'intégrale (intégrande continue positive d'intégrale nulle)

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i = 0$$

On conclut $$\boxed{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \text{ libre} \iff (f_1,\ldots,f_n) \text{ libre}}$$

4. Supposons Φ surjective. Notons $(e_1,\ldots,e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par surjectivité, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, il existe $u_i \in \mathrm{E}$ tel que $\Phi(u_i) = e_i$. Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i = 0$. Il vient

$$\forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\varphi_i(u_j)}_{=\delta_{i,j}} = \alpha_j = 0$$

D'où la liberté de $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. Supposons Φ non surjective. On a donc $\operatorname{rg}\Phi < n$. Par conséquent, on peut trouver un hyperplan H de $\mathbb{K}^n$ contenant $\operatorname{Im}\Phi$. On dispose de $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que l'hyperplan H est décrit par l'équation $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$. Comme $\operatorname{Im}\Phi \subset \mathrm{H}$, on a

$$\forall u \in \mathrm{E} \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(u) = 0$$

d'où $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i = 0$$

ce qui prouve le caractère lié de $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. On conclut

$$\boxed{\Phi \text{ surjective} \iff (\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \text{ libre}}$$

5. On a $$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{D}(f_i) = -\lambda_i f_i$$

L'application D est linéaire et il s'agit donc un endomorphisme de H. Comme les f_i sont non nulles, elles sont vecteurs propres de D. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes étant libre, on en déduit

$$\boxed{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \text{ deux à deux distinctes} \iff (f_1,\ldots,f_n) \text{ libre}}$$

Remarque : Le sens indirect est immédiat par contraposée : si deux λ_i sont égaux, la famille $(f_1,\ldots,f_n)$ contient deux éléments égaux.

6. On a $$\mathrm{X}(1) - \mathrm{X}(0) = \Phi(u)$$

d'où $$(\mathrm{L}) \text{ contrôlable} \iff \Phi \text{ surjective}$$

On conclut $$\boxed{(\mathrm{L}) \text{ contrôlable} \iff (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \text{ deux à deux distincts}}$$

Exercice 2 (****)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ le *commutateur* de A et B défini par $[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On suppose que le commutateur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ commute avec A et B. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Pour t réel, déterminer une expression de $\varphi(t)$ en fonction de $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$.

Corrigé : On rappelle que pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathrm{M}}$ est dérivable avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{t\mathrm{M}}\right] = \mathrm{M}\mathrm{e}^{t\mathrm{M}} = \mathrm{e}^{t\mathrm{M}}\mathrm{M}$$

La fonction φ est dérivable comme produit de telles fonctions et on trouve

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) &= -\mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} + \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} + \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} \\ &= \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\left(-\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\end{aligned}$$

avec, par convergence absolue

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad -\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\left[\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k\right]$$

On a $$\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$$

puis $$\mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}\,(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}) + (\mathrm{AB}-\mathrm{BA})\,\mathrm{A} = 2\mathrm{A}\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]$$

On peut alors conjecturer $\quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k = k\mathrm{A}^{k-1}\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]$

L'initialisation pour $k = 1$ est déjà faite. Supposons la propriété vraie au rang k entier non nul. Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{k+1}\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^{k+1} &= \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{B}\mathrm{A}^k\right) + (\mathrm{AB}-\mathrm{BA})\,\mathrm{A}^k \\ &= k\mathrm{A}^k\,[\mathrm{A},\mathrm{B}] + [\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\mathrm{A}^k = (k+1)\mathrm{A}^k\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}k\mathrm{A}^{k-1}\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Le commutateur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ commute avec A et B donc $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ puis avec $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ et $\mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$ et on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}t\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\mathrm{e}^{t\mathrm{B}} = t\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\varphi(t)$$

Par analogie avec le cas dans $\mathbb{C}$, on calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}\right] = t\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}$$

Enfin, les fonctions φ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}$ sont toutes deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\mathrm{X}' = t\,[\mathrm{A},\mathrm{B}]\,\mathrm{X} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n\end{cases}$$

et d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}[\mathrm{A},\mathrm{B}]}}$$

Exercice 3 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \qquad \mathrm{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Corrigé : On a $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ pour tout t réel avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{X}_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{AX}_0 = \lambda\mathrm{X}_0$. Par continuité du produit matriciel, on a

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{t^k\mathrm{A}^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{t^k\lambda^k\mathrm{X}_0}{k!}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{(t\lambda)^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \mathrm{e}^{t\lambda}\mathrm{X}_0$$

Comme une des composantes de X_0 est non nulle, on obtient

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{t\lambda} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Comme $\left|\mathrm{e}^{t\lambda}\right| = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}$ pour t réel, il s'ensuit que $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. On note $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qu'on munit de la norme $\|\mathrm{M}\|_1 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Il s'agit d'une norme d'algèbre qui vérifie, à l'instar de la norme subordonnée, l'inégalité $\|\mathrm{MX}\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}\|_1\|\mathrm{X}\|_1$ pour $(\mathrm{M},\mathrm{X}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. D'après les théorèmes de d'Alembert-Gauss et de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et annulateur de A. Ainsi, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1} + \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_r\mathrm{I}_{m_r} + \mathrm{T}_r)$$

avec les $\mathrm{T}_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures strictes et donc nilpotentes. Posons

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1}, \ldots, \lambda_r\mathrm{I}_{m_r}) \quad\text{et}\quad \mathrm{N} = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r)$$

On a clairement $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ avec N triangulaire supérieure stricte donc nilpotente et un produit par blocs montre sans difficulté $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$. Par suite, notant p l'indice de nilpotence de N, on a par commutation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{t(\mathrm{D}+\mathrm{N})}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{t\mathrm{D}}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{P}^{-1}$$

avec
$$\mathrm{e}^{t\mathrm{D}} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_1}\mathrm{I}_{m_1}, \ldots, \mathrm{e}^{t\lambda_r}\mathrm{I}_{m_r}) \quad\text{et}\quad \mathrm{e}^{t\mathrm{N}} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k\mathrm{N}^k}{k!}$$

On trouve
$$\|\mathrm{e}^{t\mathrm{D}}\|_1 = \sum_{k=1}^{r} m_k\left|\mathrm{e}^{t\lambda_k}\right| = \sum_{k=1}^{r} m_k\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_k} \quad\text{et}\quad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\|_1 \leqslant n + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{t^k\|\mathrm{N}\|^k}{k!}$$

Par croissances comparées, on obtient

$$\|\mathrm{e}^{t\mathrm{D}}\|_1\|\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\|_1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Pour $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0\|_1 = \|\mathrm{P}\mathrm{e}^{t\mathrm{D}}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0\|_1 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1\|\mathrm{e}^{t\mathrm{D}}\|_1\|\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\|_1\|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0\|_1$$

et on en déduit donc
$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S}_\mathrm{H} \qquad \mathrm{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \iff \forall\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) \qquad \mathrm{Re}\,\lambda < 0}$$

Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{A} : t \mapsto \mathrm{A}(t)$ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|\mathrm{A}(t)\|_1\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$ admet une limite dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $t \to +\infty$.

Corrigé : Dans tout ce qui suit, la norme considérée est la norme $\|\cdot\|_1$. Soit X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$. On note $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{X}(0) + \int_0^t \mathrm{X}'(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{X}(0) + \int_0^t \mathrm{A}(s)\mathrm{X}(s)\,\mathrm{d}s$$

On observe sans difficulté

$$\int_0^{+\infty} \|X'(s)\| \,ds \text{ converge} \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \int_0^{+\infty} x_i'(s)\,ds \text{ converge absolument}$$

et cette dernière condition implique la converge de $\displaystyle\int_0^t X'(s)ds$ pour $t \to +\infty$. La norme $\|\cdot\|_1$ vérifie la propriété $\|A(s)X(s)\| \leqslant \|A(s)\|\|X(s)\|$ pour tout $s \geqslant 0$ et combinée à l'inégalité triangulaire, il vient

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|X(t)\| \leqslant \|X(0)\| + \int_0^t \|A(s)\|\|X(s)\| \,ds$$

Alors, d'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|X(t)\| \leqslant \|X(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(s)\| \,ds\right) \underset{t\to+\infty}{=} O(1)$$

d'où
$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|X'(t)\| = \|A(t)X(t)\| \leqslant \|A(t)\|\|X(t)\| = O\left(\|A(t)\|\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto \|X'(t)\|$ par comparaison. Avec l'équivalence préliminaire, on conclut

$$\boxed{\text{Toute solution de } X' = A(t)X \text{ admet une limite dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ pour } t \to +\infty.}$$

Exercice 5 (****)

1. Montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices *unipotentes* (de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Quelle est l'image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle ?

Corrigé : 1. On rappelle que l'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est majoré par n. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et considérons l'application définie par

$$\forall N \in \mathcal{N} \qquad \varphi(N) = e^N - I_n$$

Pour $N \in \mathcal{N}$, on a

$$e^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + N' \quad \text{avec} \quad N' = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = N \times P(N) \quad \text{où} \quad P \in \mathbb{C}[X]$$

La matrice N' est donc nilpotente autrement dit l'application φ est définie de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$. Montrons qu'elle est bijective. Si on travaillait sur $\mathbb{R}$, la réciproque de l'application $x \mapsto e^x - 1$ serait $x \mapsto \ln(1+x)$ définie de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On connaît le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ et on va simplement adapter son usage aux matrices nilpotentes. Posons

$$\forall N \in \mathcal{N} \qquad \psi(N) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k}$$

L'application ψ est à valeurs dans $\mathcal{N}$ puisque pour $N \in \mathcal{N}$, on a $\psi(N) = N \times Q(N)$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$. Notons

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^k}{k!} \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$$

On a
$$e^x - 1 \underset{x\to0}{=} A(x) + o(x^{n-1}) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to0}{=} B(x) + o(x^{n-1})$$

et
$$\forall N \in \mathcal{N} \qquad \varphi(N) = A(N) \quad \text{et} \quad \psi(N) = B(N)$$

Notons π_{n-1} le projecteur de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(X^k, k \geqslant n)$. On a

$$\mathrm{e}^{\ln(1+x)}-1 = x \underset{x\to 0}{=} \pi_{n-1}(\mathrm{A}\circ\mathrm{B})(x)+\mathrm{o}(x^{n-1}) \quad \text{et} \quad \ln(1+\mathrm{e}^{x}-1) = x \underset{x\to 0}{=} \pi_{n-1}(\mathrm{B}\circ\mathrm{A})(x)+\mathrm{o}(x^{n-1})$$

Par unicité du développement limité, on en déduit

$$\pi_{n-1}(\mathrm{A}\circ\mathrm{B}) = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad \pi_{n-1}(\mathrm{B}\circ\mathrm{A}) = \mathrm{X}$$

Or, pour $\mathrm{N} \in \mathcal{N}$, du fait du caractère nilpotent, on a exactement

$$\varphi\circ\psi(\mathrm{N}) = \pi_{n-1}(\mathrm{A}\circ\mathrm{B})(\mathrm{N}) \quad \text{et} \quad \psi\circ\phi(\mathrm{N}) = \pi_{n-1}(\mathrm{B}\circ\mathrm{A})(\mathrm{N})$$

d'où
$$\forall \mathrm{N}\in\mathcal{N} \qquad \varphi\circ\psi(\mathrm{N}) = \psi\circ\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'exponentielle réalise une bijection entre matrices nilpotentes et unipotentes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

2. Montrons que $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathrm{B}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = \{\lambda\}$ où $\lambda\in\mathbb{C}^*$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = 0 \iff (\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}_n)^n = 0$$

Par suite, la matrice $\mathrm{N} = \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}_n)$ est nilpotente et on a $\mathrm{B} = \lambda(\mathrm{I}_n+\mathrm{N})$. D'après le résultat de la question 1 et d'après la surjectivité de $\exp : \mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, on dispose de $\mu\in\mathbb{C}$ et $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n+\mathrm{N} = \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$$

d'où
$$\mathrm{B} = \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{e}^{\mu\mathrm{I}_n+\mathrm{M}}$$

Généralisons au cas d'une matrice $\mathrm{B}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1}+\mathrm{N}_1,\ldots,\lambda_r\mathrm{I}_{m_r}+\mathrm{N}_r)$$

avec les $\mathrm{N}_i\in\mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{C})$ nilpotentes. D'après le cas préliminaire, on a

$$\forall i\in[\![1\,;r]\!] \qquad \exists \mathrm{M}_i\in\mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{C}) \quad | \quad \lambda_i\mathrm{I}_{n_i}+\mathrm{N}_i = \mathrm{e}^{\mathrm{M}_i}$$

d'où
$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{M}_1},\ldots,\mathrm{e}^{\mathrm{M}_r}) = \exp[\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_r)]$$

et par suite
$$\mathrm{B} = \mathrm{P}\exp[\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_r)]\,\mathrm{P}^{-1} = \exp[\mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_r)\mathrm{P}^{-1}]$$

On conclut
$$\boxed{\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$