Feuille d'exercices n°70

Exercice 1 (*)

L'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle surjective ? injective ?

Exercice 2 (**)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = 3x - y + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = 2x - \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 3x - y + \mathrm{e}^{t} \\ y' = 2x - \mathrm{e}^{t} \end{cases}$

Exercice 3 (*)

On pose $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2\mathrm{i}\pi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\pi & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i}\pi \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 4 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et p un projecteur de E. Expliciter $\exp(p)$ puis calculer $\det(\exp(p))$ et $\mathrm{Tr}\,(\exp(p))$.

Exercice 5 (**)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$x^{(3)} - x = 0 \tag{H}$$

1. Déterminer une expression réelle des solutions de l'équation différentielle (H).
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(x(0), x'(0), x''(0))$ pour avoir une solution $(t \mapsto x(t))$ convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 (**)

Calculer e^{A} dans les cas suivants :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geqslant \mathrm{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 8 (**)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $$e^{A} \in \mathbb{K}[A]$$

Exercice 9 (*)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} M = 1$. Calculer e^{M}.

Exercice 10 (**)

Montrer $$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det \exp(A) = \exp \operatorname{Tr}(A)$$

L'exponentielle est-elle surjective de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 11 (**)

Soit $A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$. Résoudre le système différentiel (H) : $X' = AX$ et préciser la nature des courbes paramétrées par $t \mapsto X(t)$.

Exercice 12 (**)

Soit $A : t \mapsto A(t)$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad X'(t) = A(t)X(t)$$

1. Montrer $$X(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \qquad X(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
2. Montrer $$X(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \qquad X(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 13 (**)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$;
2. Toute solution de $X' = AX$ est de norme $\|\cdot\|$ constante.

Exercice 14 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Établir

$$AB = BA \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$