ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°71

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Pour α réel, on note

$$\mathrm{U}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{U}(\alpha)$ avec α réel.
2. Déterminer la nature des courbes paramétrées solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.

Exercice 2 (***)

Soit n entier non nul et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $\operatorname{Ker} \mathrm{N}$ et $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$.

Exercice 3 (***)

Montrer que l'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le fait que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ muni d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{I}_p + \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et $(\mathrm{A}_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}$. Établir
$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$
3. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_{A} scindé sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \text{ diagonalisable}$$

L'équivalence a-t-elle lieu sans l'hypothèse χ_{A} scindé ?

Exercice 6 (****)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$X' = AX \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall X \in S_H \qquad X(t) \underset{t \to +\infty}{=} O(1)$$

Exercice 7 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les solutions de l'équation

$$X' = AX \tag{H}$$

Pour $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $t \mapsto \Phi(t, X_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Les solutions de (H) sont dites *stables* s'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \forall (X_0, X_1) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \qquad \|\Phi(t, X_0) - \Phi(t, X_1)\| \leqslant C \|X_1 - X_0\|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que les solutions de (H) soient stables.