ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°72

Exercice 1 (***)

On note $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \mathscr{C}^\infty([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. Soit n entier non nul. On considère le système différentiel

$$\mathrm{X}' = \mathrm{DX} + u(t)\mathrm{B} \tag{L}$$

avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u \in \mathrm{E}$

Le système est dit *contrôlable* si pour $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que la solution de (L) vérifiant $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0$ vérifie aussi $\mathrm{X}(1) = \mathrm{X}_1$.

1. Résoudre le système différentiel (L).
   Pour $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$, on note $\varphi_i(u)$ la valeur en $t = 1$ de la solution particulière de la i-ème ligne de (L) qui s'annule en zéro puis on pose $\Phi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$.
2. Justifier que $\varphi_i \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ pour $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ puis $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ équivaut à la liberté de la famille de F de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ avec $f_i : s \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i(1-s)}$ pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$.
4. Montrer $$\Phi \text{ surjective } \iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ libre}$$
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de liberté de $(f_1, \dots, f_n)$ portant sur les λ_i.
6. Conclure en déterminant une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour avoir (L) contrôlable.

Indications : 3. Écrire une combinaison linéaire nulle de φ_i et faire un choix adapté de $u \in \mathrm{E}$.
4. Pour l'implication réciproque, procéder par contraposée et observer que si Φ est non surjective, alors $\mathrm{Im}\,\Phi$ est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
5. Considérer l'application $\mathrm{D} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}, f \mapsto f'$.

Exercice 2 (****)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ le *commutateur* de A et B défini par $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On suppose que le commutateur $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ commute avec A et B. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Pour t réel, déterminer une expression de $\varphi(t)$ en fonction de $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$.

Indications : Justifier que φ est dérivable puis établir

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\left(-\mathrm{B}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\right)\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$$

Conjecturer une formule reliant $\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k$ à $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ tout k entier non nul. En déduire une relation simple entre φ' et φ puis conclure.

Exercice 3 (****)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$X' = AX \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall X \in S_H \qquad X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Indications : Considérer $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $AX_0 = \lambda X_0$ avec $X_0 \neq 0$ puis discuter du comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy $X' = AX$, $X(0) = X_0$ pour en déduire $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Pour la réciproque, munir $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_1$, observer qu'il s'agit d'une norme d'algèbre qui vérifie également

$$\forall (M, X) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \|MX\|_1 \leqslant \|M\|_1 \|X\|_1$$

Justifier qu'on dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P(D+N)P^{-1}$ avec D diagonale, N nilpotente et telles que $DN = ND$. En déduire une majoration de $\|e^{t(D+N)}\|_1$ puis son comportement asymptotique pour $t \to +\infty$ et conclure sur celui d'une solution de (H).

Exercice 4 (****)

Soit $A : t \mapsto A(t)$ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|A(t)\|_1 \,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que toute solution de $X' = A(t)X$ admet une limite dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour $t \to +\infty$.

Indications : Observer que la convergence de $X(t)$ pour $t \to +\infty$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_0^t X'(s)\,\mathrm{d}s$ puis que celle-ci est garantie par l'intégrabilité de $t \mapsto \|X'(t)\|_1$. Utiliser alors une écriture intégrale pour X puis le lemme de Gronwall pour conclure.

Exercice 5 (****)

1. Montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices *unipotentes* (de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Quelle est l'image de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle ?

Indications : 1. L'indice de nilpotence est majoré par n. Établir que pour N nilpotente, $e^N - I_n$ l'est aussi puis, notant $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes, établir que $N \mapsto e^N - I_n$ est un bijection de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}$. On pourra considérer les développement limités usuels de $e^x - 1$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre $n-1$.
2. Traiter d'abord le cas d'une matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}\,(B) = \{\lambda\}$ en décomposant $B = \lambda(I_n + N)$ avec N nilpotente puis généraliser.