

Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 17 10/02/25 - 14/02/25

Programme :

Équations différentielles linéaires :

- Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, méthode de variation de la constante ;
- Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, wronskien, équation d'ordre 1 vérifiée par le wronskien, le wronskien est nul si et seulement s'il s'annule en un point, caractérisation d'un système fondamental de solutions, méthode de variation des constantes, solutions développables en série entière, méthode du wronskien, méthode de Lagrange, changement de variables ;
- Équations différentielles linéaires vectorielles, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, caractérisation d'un système fondamental de solutions, méthode de variation des constantes ;
- Exponentielle d'une matrice, d'un endomorphisme, propriété fondamentale en cas de commutation, continuité de l'exponentielle, caractère \mathcal{C}^∞ de $t \mapsto e^{ta}$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$ et dérivée de cette application, méthodes de calculs (cas diagonale, diagonalisable, nilpotent, trigonalisable, avec polynôme annulateur) ;
- Système différentiel linéaire à coefficients constants, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire et expression de la solution, résolution pratique (cas diagonalisable, trigonalisable, homogène et avec second membre) ;
- Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n , formulation matricielle d'ordre 1, problème de Cauchy, théorème de Cauchy linéaire, structure des solutions d'une équation homogène et d'une équation avec second membre, principe de superposition, résolution dans le cas où la matrice compagne est diagonalisable, cas général (vu mais hors-programme).

Questions de cours : (avec preuve sauf mention contraire)

1. Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle homogène ou avec second membre ;
2. Caractérisation d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle ;
3. Méthode de variation des constantes pour une équation différentielle linéaire vectorielle ;
4. Calcul de $\exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ avec θ réel ;
5. Continuité de \exp sur $\mathcal{L}(\mathbf{E})$;
6. Caractère \mathcal{C}^∞ de $t \mapsto e^{ta}$ avec $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ et dérivée de cette application ;
7. Exponentielle d'une matrice diagonale, diagonalisable, trigonalisable ;
8. Résolution du problème de Cauchy $x' = a \cdot x, x(t_0) = x_0$ avec $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$;
9. Résolution du problème de Cauchy $x' = a \cdot x + b(t), x(t_0) = x_0$ avec $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E}), b \in \mathcal{C}^0(\mathbf{I}, \mathbf{E})$;
10. Résolution de $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable ;
11. Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n homogène ou avec second membre ;
12. Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants (énoncé et preuve réservés au groupe +).