# CINÉTIQUE

TD

v1.1

Institution Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

## Table des matières



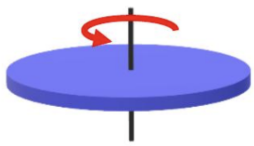
## 1 Exercice 1 - Calcul de Matrice d'inertie

*Les deux premiers exercices sont tirés de* D.Defauchy

Imaginons que nous disposons d'un plateau tournant autour d'un axe vertical $\vec{z}$ par un moteur fournissant un couple constant $C$, à partir d'une vitesse angulaire nulle.

Il n'est pas nécessaire d'avoir fait tout le chapitre de Dynamique pour déterminer l'équation du mouvement. Celle ci s'écrit :

$$C = J\ddot{\theta}$$



**Objectif**

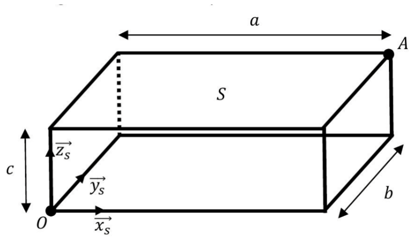
Déterminer le $J$, l'inertie à prendre en compte selon que le solide déposé sur le plateau soit un pavé ou un cylindre.

**Hypothèses :**

- l'inertie du plateau est négligée
- les pièces adhèrent parfaitement au plateau
- la gravité est négligée

## 1.1 Matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle

Soit le parallélépipède rectangle de masse volumique constante suivant :




**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G$ du solide $S$ dans le repère $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

Question 1 :

$G$ est à l'intersection des 3 plans de symétrie du solide : $G\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_G(S)$ de $S$ en $G$

Question 2 :

$$V = abc; \quad m = \rho abc \quad ; dV = dxdydz; \text{ Origine en } G$$

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s} = \cdots = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_S}$$

La matrice en $G$ est diagonale car on a au moins deux plans de symétrie parmi $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s})$, $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{z_s})$ et $(G, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_S})$ (attention, le G est important, le point d'expression de la matrice sous forme simplifiée doit appartenir aux éléments de symétrie). Cela veut dire aussi :

$$\boldsymbol{D = E = F = 0}$$

$$A = \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_S y^2 \rho dV + \int_S z^2 \rho dV$$

**Attention**

Les bornes de l'intégrale doivent être centrées sur le point G.

$$A = \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2 dxdydz + \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dxdydz$$

$$A = \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz$$

$$A = \rho \frac{ac}{3} \left[y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \rho \frac{ab}{3} \left[z^3\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \frac{ac}{3} \frac{b^3}{4} + \rho \frac{ab}{3} \frac{c^3}{4} = \rho \frac{ab^3c}{12} + \rho \frac{abc^3}{12} = \frac{m}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

Par analogie :

$$B = \int_S \left(x^2+z^2\right) dm = \boldsymbol{\frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right)} \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \int_S \left(x^2+y^2\right) dm = \boldsymbol{\frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)}$$

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}_{G,B_S}$$

**Question 3** Déterminer la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_O(S)$ de $S$ en $O$ en utilisant le théorème de Huygens généralisé

Question 3 :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}^{B_s}$$

$$I_O(S) = I_G(S) + m \begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{4} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_S} + \begin{bmatrix} m\frac{b^2+c^2}{4} & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & m\frac{a^2+c^2}{4} & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & m\frac{a^2+b^2}{4} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

avec : $\dfrac{m}{12} + \dfrac{m}{4} = \dfrac{4m}{12} = \dfrac{m}{3}$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}\left(b^2+c^2\right) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}\left(a^2+c^2\right) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}_{O,B_S}$$

**Question 4** Déterminer la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_O(S)$ de $S$ en $O$ par la méthode intégrale

Question 4 :

On change l'origine du repère d'intégration, en ce point il est nécessaire de calculer tous les termes de la matrice (pas de symétrie passant par 0 ) :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_S}$$

$$A=\int_S \left(y^2+z^2\right)dm=\int_S y^2\rho dV+\int_S z^2\rho dV$$

$$A=\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} y^2dxdydz+\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} z^2dxdydz$$

$$A=\rho\int_{x=0}^{a}dx\int_{y=0}^{b}y^2dy\int_{z=0}^{c}dz+\rho\int_{x=0}^{a}dx\int_{y=0}^{b}dy\int_{z=0}^{c}z^2dz$$

$$A=\rho\frac{ab^3c}{3}+\rho\frac{abc^3}{3}=\frac{m}{3}\left(b^2+c^2\right)$$

Par analogie :

$$B=\frac{m}{3}\left(a^2+c^2\right);\quad C=\frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right)$$

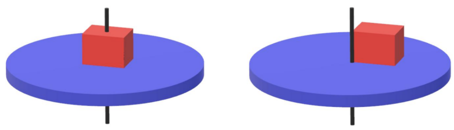
$$D=\int_S yzdm=\rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} yzdxdydz=\rho\int_{x=0}^{a}dx\int_{y=0}^{b}ydy\int_{z=0}^{c}zdz$$

$$D=\rho a\frac{b^2}{2}\frac{c^2}{2}=\frac{m}{4}bc$$

Par analogie : $\boldsymbol{E}=\frac{m}{4}ac$ ; $F=\frac{m}{4}\boldsymbol{ab}$

$$\Rightarrow I(O,S)=\begin{bmatrix} \frac{m}{3}\left(b^2+c^2\right) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}\left(a^2+c^2\right) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_S}$$

**Question 5** Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie $J$ recherchée



Question 5 :

$$J=\vec{z}\cdot I(M,S)\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}\cdot\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}\cdot\begin{pmatrix}-E\\-D\\C\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}=C$$

Il vient de suite pour chacun des cas : $J=J_G^Z=\frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)$ $\quad J=J_A^z=\frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right)$

**Remarque**

Il est simple de trouver $J_A^Z$ connaissant la matrice en G sans déplacer toute la matrice, un simple théorème de Huygens suffit : $J_A^Z = J_G^Z + md^2$ avec $d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

**Question 6** ⋆ On souhaite maintenant faire tourner cet objet autour de l'axe passant par la diagonale du pavé. Déterminer le moment d'inertie autour de l'axe $(OA)$. (cela se simplifie bien)

Question ⋆ :

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans $\mathfrak{B}_s$ : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$

Soit le vecteur unitaire associé : $\overrightarrow{OA} = L\vec{u}$ avec $L = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

Penser au fait que $G$ est sur la droite OA :

$$I = \vec{u} \cdot I(G,S)\vec{u} = \vec{u}.I(A,S)\vec{u}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s} \cdot \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_s} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_s} \cdot \begin{pmatrix} \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right)a \\ \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right)b \\ \frac{m}{12}^{\mathfrak{B}_s}\left(a^2+b^2\right)c \end{pmatrix}$$

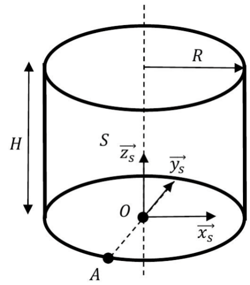
$$I = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \cdot \left(\frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right)a^2 + \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right)b^2 + \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)c^2\right)$$

$$I = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\frac{m}{12}\left(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2\right)$$

$$\boxed{I = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

## 1.2 Matrice d'inertie d'un cylindre

Soit le cylindre de masse volumique constante suivant :




**Question 1** Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G$ du solide $S$ dans le repère $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

Question 1 :

$G$ est à l'intersection des plans de symétrie verticaux et du plan médian horizontal du solide : $G\left(0, 0, \frac{H}{2}\right)$

**Question 2** Déterminer la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_G(S)$ de $S$ en $G$

Question 2 :

$$V = \pi R^2 H \quad ; \quad m = \rho\pi R^2 H \quad ; \quad dV = r dr d\theta dz$$

$$\text{Origine en } G$$

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_S}$$

On a une symétrie de révolution autour de l'axe $(G, \overrightarrow{z_S})$ :

$$D = E = F = 0$$

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2)\, dm = \int_S r^2 dm = \rho \int_S r^2 dV = \rho \int_{r=0}^{R} r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz$$

$$C = \rho\frac{R^4}{4} 2\pi H = \rho\pi H R^2 \frac{R^2}{2} = m\frac{R^2}{2}$$

$$\int_S z^2 dm = \rho \int_{r=0}^{R} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz = \rho 2\pi \frac{R^2}{2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \rho\pi\frac{R^2}{3}\frac{2H^3}{8} = \rho\pi R^2 H \frac{H^2}{12} = m\frac{H^2}{12}$$

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm = m\left(\frac{\boldsymbol{R}^2}{4} + \frac{\boldsymbol{H}^2}{12}\right)$$

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_S}$$

**Question 3** Donner la forme de la matrice $\overline{\overline{I}}_A(S)$

Question 3 :

Plan de symétrie $(A, \vec{y}, \vec{z})$, donc :

$$I_A(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{O,B_s}$$

**Question 4** Déterminer la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_A(S)$ de $S$ en $A$ en utilisant le théorème de Huygens généralisé

Question 4 :

$$\overrightarrow{GA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ -\frac{H}{2} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} \quad ; \quad I_A(S) = I_G(S) + m \begin{bmatrix} R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{4} & -\frac{RH}{2} \\ 0 & -\frac{RH}{2} & R^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I_A(S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_s} + m \begin{bmatrix} R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{4} & -\frac{RH}{2} \\ 0 & -\frac{RH}{2} & R^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_s}$$

$$I_A(S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + R^2 + \frac{H^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + \frac{H^2}{4}\right) & -m\frac{RH}{2} \\ 0 & -m\frac{RH}{2} & m\left(\frac{R^2}{2} + R^2\right) \end{bmatrix}_{O,B_S}$$

$$I_A(S) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{5}{4}R^2 + \frac{H^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right) & -m\frac{RH}{2} \\ 0 & -m\frac{RH}{2} & m\frac{3}{2}R^2 \end{bmatrix}_{O,\mathfrak{B}_S}$$

**Question 5** Retrouver ce résultat par la méthode de calcul intégral pour déterminer $\overline{\overline{I}}_A(S)$ (et pleurer du sang en constatant l'échec)

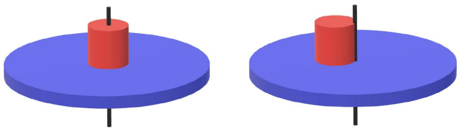
Question 5 :

Le calcul de $I(A, S)$ par méthode intégrale va nécessiter de placer le centre du repère en $A$, ce qui rend les bornes complexes...

$$\int_S dm = \rho \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{f(\theta)} r dr d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \quad ; \quad f(\theta) = ???$$

$$\int_S dm = \rho \int_{x=0}^{2R} \int_{y=0-f(x)}^{f(x)} y dy d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \quad ; \quad f(x) = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}$$

**Question 6** Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie $J$ recherchée



Question 6 :
Il vient de suite pour chacun des cas : $J = J_G^Z = m\frac{R^2}{2}$ $J_A^Z = J_G^Z + mR^2$

### Remarque

Comme avant il est simple de trouver $J_A^Z$ connaissant la matrice en G sans déplacer toute la matrice, un simple théorème de Huygens suffit : $J_A^Z = J_G^Z + md^2$ avec $d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

**Question 7** Donner finalement la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_G(S)$ d'un cylindre de révolution d'axe $(G, x)$

Question 7 :

Il suffit d'adapter la diagonale :

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} m\frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{G,\mathfrak{B}_S}$$

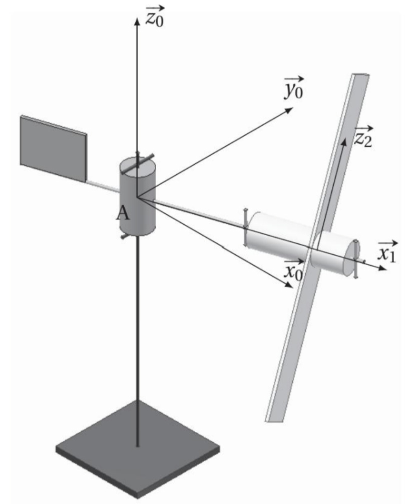
## 2 Éolienne (École de l'air 1997)

On se propose d'étudier une éolienne. Une schématisation simplifiée peut-être donnée par l'ensemble constitué :

- d'un mat 0 ;

- d'un bloc oscillant (solide 1) en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ avec le bâti 0 ;

- d'une hélice associée au rotor de la génératrice (solide 2) en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$ avec le solide 1 .




**Paramétrage**
À chaque solide $i$ est associé un repère de base orthonormée directe $(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ avec :

- $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$ et $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \alpha$
- $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$ et $(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_1}) = \beta$

**Solide 1**
Homogène de masse $m_1$, de centre d'inertie A, admettant le plan $(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$ comme plan de symétrie matérielle.

**Solide 2**
Homogène de masse $m_2$, et de centre d'inertie $G_2, \overrightarrow{AG_2} = l \cdot \overrightarrow{x_1}$, ce solide est constitué :

- d'un cylindre plein $2_a$ de hauteur H et de rayon R, d'axe $(A, \overrightarrow{x_2})$, de masse $m_{2a}$, de centre d'inertie $G_{2a}$ avec $\overrightarrow{G_2G_{2a}} = \lambda \cdot \overrightarrow{x_2}$
- d'une plaque rectangulaire $2_b$, d'épaisseur négligeable, de coté $a$ suivant $\overrightarrow{y_2}$ et $b$ suivant $\overrightarrow{z_2}$, de masse $m_{2b}$, de centre d'inertie $G_{2b}$ avec $G_{2b}$ avec $\overrightarrow{G_2G_{2b}} = \mu \cdot \overrightarrow{x_2}$

**Question 1** On note, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ et $F_1$ les coefficients de l'opérateur d'inertie du solide $S_1$ dans la base $B_1$, préciser la forme de la matrice d'inertie du solide $S_1$ en $A$.

Le solide 1 possède un plan de symétrie $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$, les deux produits d'inertie comportant $\overrightarrow{y_1}$ sont donc nuls.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S_1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$$

**Question 2** Déterminer :

1. la relation entre $\lambda$, $\mu$ et les masses.
2. l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{2a}}(2a)}}$ en $G_{2a}$ du solide $2a$ dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ en fonction de $m_{2a}$ et des dimensions H et R.

3. l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{2b}}(2b)}}$ en $G_{2b}$ du solide $2_b$ dans la base $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$, en fonction de la masse $m_{2b}$ et des dimensions $a$ et $b$.
4. l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_2}(2)}}$ en $G_2$ du solide 2 dans la base $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$.

On notera $A_2$, $B_2, C_2, \ldots$, les termes de l'opérateur $\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_2}(2)}}$ dans la suite du problème.

Q2.1. Relation entre $\lambda$, $\mu$ et les masses

$$\begin{aligned}
m_2\overrightarrow{AG_2} &= m_{2a}\cdot\overrightarrow{AG_{2a}} + m_{2b}\cdot\overrightarrow{AG_{2b}}\\
&= m_{2a}\cdot\left(\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2G_{2a}}\right) + m_{2b}\cdot\left(\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2G_{2b}}\right)\\
\overrightarrow{0} &= m_{2a}\cdot\overrightarrow{G_2G_{2a}} + m_{2b}\cdot\overrightarrow{G_2G_{2b}} = (\lambda\cdot m_{2a}+\mu\cdot m_{2b})\cdot\overrightarrow{x_2}\\
\lambda\cdot m_{2a} &= -\mu\cdot m_{2b}
\end{aligned}$$

Q2.2. Le solide $2a$ est modélisé par un cylindre d'axe $(A,\ \overrightarrow{x_1})$, donc

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{2a}}(2a)}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_{2a}\cdot R^2 & 0 & 0\\ 0 & m_{2a}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & m_{2a}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right)\end{pmatrix}_{\substack{G_{2a}\\(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}}$$

Q2.3. Le solide $2_b$ est modélisé par une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable, donc

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{2b}}(2_b)}} = \begin{pmatrix} m_{2b}\cdot\frac{a^2+b^2}{12} & 0 & 0\\ 0 & m_{2b}\cdot\frac{b^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & m_{2b}\cdot\frac{a^2}{12}\end{pmatrix}_{\substack{G_{2b}\\(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}}$$

Q2.4. On déplace, grâce au théorème de Huygens les deux matrices d'inertie en $G_2$.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_2}(2a)}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{2a}}(2a)}} + m_{2a}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda^2&0\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_{2a}\cdot R^2 & 0 & 0\\ 0 & m_{2a}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}+\lambda^2\right) & 0\\ 0 & 0 & m_{2a}\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}+\lambda^2\right)\end{pmatrix}_{G_{2a}}$$

$$\overline{\overline{I_{G_2}(2_b)}} = \overline{\overline{I_{G_{2b}}(2_b)}} + m_{2b}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\mu^2&0\\0&0&\mu^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{2b}=m_{2b}\cdot\frac{a^2+b^2}{12} & 0 & 0\\ 0 & B_{2b}=m_{2b}\cdot\left(\frac{b^2}{12}+\mu^2\right) & 0\\ 0 & 0 & C_{2b}=m_{2b}\cdot\left(\frac{a^2}{12}+\mu^2\right)\end{pmatrix}_{G_2}$$

on pose

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_2(2a)}}} = \begin{pmatrix} A_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2a} & 0 \\ 0 & 0 & B_{2a} \end{pmatrix}_{G_{2a}}$$

et

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_2(2b)}}} = \begin{pmatrix} A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_{2b} \end{pmatrix}_{G_{2b}}$$

finalement

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_2(2)}}} = \begin{pmatrix} A_2 = A_{2a} + A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_2 = B_{2a} + B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_2 = B_{2a} + C_{2b} \end{pmatrix}_{G_2}$$

**Question 3** Déterminer $\overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}}$ le moment cinétique au point A du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère galiléen, puis le torseur cinétique du solide $S_1$ dans son mouvement par rapport à $R_0$.

Le point A est un point fixe dans le mouvement de $S_1$ par rapport au répère $R_0$, on sait alors que

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = \overline{\overline{I_{A_1}\,(\,S_1)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}}.$$

En A dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$.

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

d'où

$$\{\mathscr{C}_{S_1/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{S_1/R_0}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_A$$

**Question 4** Déterminer $\overrightarrow{\sigma_{G_2,\ S_2/R_0}}$ le moment cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport au galiléen au point $G_2$ puis le torseur cinétique du solide $S_1$ dans son mouvement par rapport à $R_0$.

En $G_2$, centre d'inertie de $S_2$ on peut écrire

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2,\ S_2/R_0}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_{A_2}\,(\,S_2)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_{A_2}\,(\,S_2)}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}}\right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S_2}/R_0}$ doit être écrit dans la même base que la matrice d'inertie $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} + \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{z_2} + \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_2}$$

En $G_2$ dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

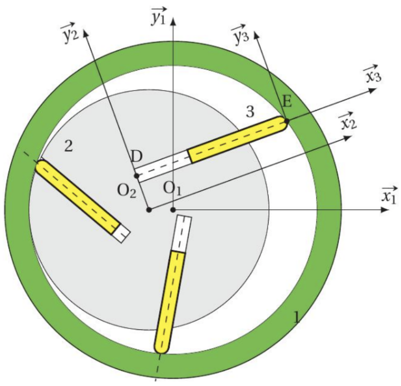
$$\overrightarrow{\sigma_{G_2,S_2/R_0}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix} = A_2 \cdot \dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + B_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + C_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta\overrightarrow{z_2}$$

d'où le torseur cinétique

$$\left\{\mathscr{C}_{\mathrm{S_2/R_0}}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{p_{\mathrm{S_2/R_0}}} = m_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{V_{G_2} \in S_2/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{G_2,\ S_2/R_0}}} \end{array} \right\}_{\mathrm{G_2}} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 \cdot l \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ \mathrm{A_2} \cdot \dot{\beta}\overrightarrow{x_2} + \mathrm{B_2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + \mathrm{C_2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta\overrightarrow{z_2} \end{array} \right\}_{\mathrm{G_2}}$$

## 3 Pompe à palettes

Soit, une pompe à palettes simplifiée définie sur la figure ci-dessous. Le rotor 2 est en liaison pivot par rapport au corps 1 en $O_2$, les palettes 3 coulissent librement dans le rotor et sont plaquées par effet centrifuge sur le corps. La variation de volume obtenue pendant la rotation permet d'aspirer de l'air (les orifices d'entrées/sorties ne sont pas représenté).




On pose :

- corps 1 : $\mathscr{R}_1 = (O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ le repère associé au corps supposé galiléen, R le rayon intérieur du corps
- rotor 2 : $\mathscr{R}_2 = (O_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$, le repère associé au rotor, avec $\alpha = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$ et $\overrightarrow{O_1O_2} = -e \cdot \vec{x_1}$
- palette 3 : de masse $m_3$, avec $\overrightarrow{O_2D} = d \cdot \vec{y_2}, \overrightarrow{EG} = -\frac{l}{2} \cdot \vec{x_2}$ et $\overrightarrow{DE} = \lambda \cdot \vec{x_2}$, G le centre d'inertie et E le point de contact avec le corps supposé dans le plan de symétrie de la palette

**Question 1** Déterminer les torseurs cinématiques $\{V_{2/1}\}$ en $O_2$ et $\{V_{3/1}\}$ en E et G en fonction de $\lambda$ et $\alpha$ et de leurs dérivées.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z_1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_2}$$

Pour le solide 3 , on a :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

et :

$$\overrightarrow{V_{E\in 3/1}} = \frac{d\overrightarrow{O_1E}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_2D}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{DE}}{dt} = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x_2} + \dot{\lambda} \cdot \vec{x_2} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y_2}$$

d'où le torseur cinématique en E

$$\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z_1} \\ \overrightarrow{V_{E\in 3/1}} = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x_2} + \dot{\lambda} \cdot \vec{x_2} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y_2} \end{array} \right\}_E$$

et en G :

$$\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z_1} \\ \overrightarrow{V_{G\in 3/1}} = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x_2} + \dot{\lambda} \cdot \vec{x_2} + (\lambda - \frac{l}{2}) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y_2} \end{array} \right\}_G$$

**Question 2** Poser les calculs permettant de déterminer $\lambda$ en fonction de $\alpha$ et des paramètres géométriques. $\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2D}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EO_1}=\overrightarrow{0} \rightarrow -e\cdot\overrightarrow{x_1}+d\cdot\overrightarrow{y_2}+\lambda\cdot\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{EO_1}=\overrightarrow{0}$.

On pose $\overrightarrow{O_1E}=R\cdot\cos\theta\cdot\overrightarrow{x_1}+R\cdot\sin\theta\cdot\overrightarrow{y_1}$ ce qui permet d'écrire :

$$-e\cdot\overrightarrow{x_1}+d\cdot\overrightarrow{y_2}+\lambda\cdot\overrightarrow{x_2}-R\cdot\cos\theta\cdot\overrightarrow{x_1}-R\cdot\sin\theta\cdot\overrightarrow{y_1}=\overrightarrow{0}$$

d'où l'on déduit les deux équations scalaires projetées sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$ :

$$\left\{\begin{array}{rl} -e-d\cdot\sin\alpha+\lambda\cdot\cos\alpha+R\cdot\cos\theta & =0 \\ d\cdot\cos\alpha+\lambda\cdot\sin\alpha+R\cdot\sin\theta & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda=e\cdot\cos(\alpha)\pm\sqrt{e^2\cdot(\cos(\alpha)^2-1)-2ed\cdot\sin(\alpha)+R^2-d^2} \\ \tan\theta=\frac{d\cdot\cos\alpha+\lambda\cdot\sin\alpha}{-e-d\cdot\sin\alpha+\lambda\cdot\cos\alpha} \end{array}\right.$$

Seule la valeur positive de $\lambda$ a un sens technologique.

On pose pour la matrice d'inertie du rotor $\overline{\overline{I_{O_2}(2)}}=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{O_2}$ et on modélise la palette par un solide plan d'épaisseur négligeable, de hauteur $h$ (suivant $\overrightarrow{z_2}$ ) et de longueur $l$ (suivant $\overrightarrow{x_2}$ ).

**Question 3** Déterminer le torseur cinétique du rotor en $O_2$. $O_2$ est un point fixe dans le repère galiléen,

$$\left\{\mathscr{C}_{2/1}\right\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{p_{2/1}}=\vec{0} \\ \overrightarrow{\sigma_{O_2,2/1}}=C_2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_2} \end{array}\right\}_{G_2}$$

**Question 4** Donner la matrice d'inertie de la palette (préciser le point et la base). Il est judicieux ici d'écrire la matrice en G dans la base $\mathscr{B}_2$.

$$\overline{\overline{I_G(3)}}=\begin{pmatrix} A_3=m_3\cdot\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & B_3=m_3\cdot\frac{l^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & C_3=m_3\cdot\frac{l^2}{12} \end{pmatrix}_G$$

**Question 5** Déterminer le torseur cinétique $\left\{\mathscr{C}_{3/1}\right\}$ de la palette 3 dans son mouvement par rapport au corps 1 en G. $\left\{\mathscr{C}_{3/1}\right\}=\left\{\begin{array}{c} m_3\cdot\overrightarrow{V_{G\in3/1}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G,3/1}} \end{array}\right\}_G=\left\{\begin{array}{c} -d\cdot m_3\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{x_2}+m_3\cdot\dot{\lambda}\cdot\overrightarrow{x_2}+m_3\cdot(\lambda-\frac{l}{2})\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{\sigma_{G,3/1}}=C_3\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z2} \end{array}\right\}_G$