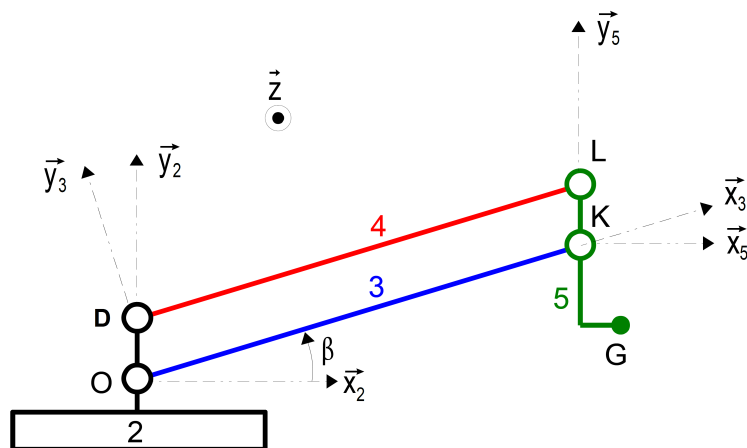
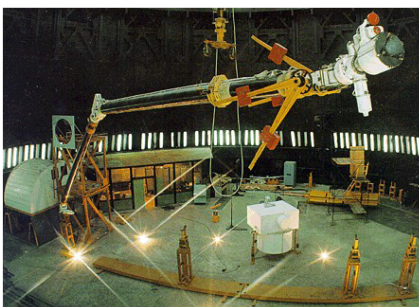


Table des matières

1	Simulateur de mouvements des satellites	1
2	Roue autonome pour Fauteuil - EZ Wheel - CCinp MP 2013	3
3	Centrifugeuse géotechnique	7
4	Banc d'essai vibrant	10

1 Simulateur de mouvements des satellites

On considère un bras manipulateur, qui permet de simuler le mouvement des satellites.



Objectif : Déterminer le couple moteur que le moteur situé en O entre **2** et **3** devra fournir pour faire se déplacer le satellite. Pour cela, il est nécessaire de déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_{0(5/2)} \cdot \vec{z}$.

Le bras manipulateur est constitué du bras principal **3**, de longueur L , en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti **2**. Le repère \mathcal{R}_3 est lié à ce bras principal. Un dispositif de préhension du satellite est

placé à son extrémité en K . Le satellite, fixé à $\mathbf{5}$, est assimilé à un point G , de masse M . On donne $\overrightarrow{KG} = x\vec{x}_5 + y\vec{y}_5 + z\vec{z}_5$ avec x , y et z trois constantes. De plus, $\|\overrightarrow{OD}\| = \|\overrightarrow{KL}\| = R$

Le bâti, noté $\mathbf{2}$, est supposé galiléen.

Question 1 Justifier que le mouvement de $\mathbf{5}$ par rapport à $\mathbf{2}$ est un mouvement de translation.

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\Gamma}_{G \in \mathbf{5}/\mathbf{2}}$.

Question 3 Déterminer $\overrightarrow{\delta}_{O, \mathbf{5}/\mathbf{2}} \cdot \vec{z}_2$.

Question 4 Effectuer l'application numérique $\|\overrightarrow{\delta}_{O, \mathbf{5}/\mathbf{2}} \cdot \vec{z}_2\|$ pour $L=17$ m, $M = 12\,000$ kg, $\beta = 30^\circ$, $\dot{\beta} = 2,5$ rad/s, $\ddot{\beta} = 2$ rad/s², $x = 1,45$ m, $y = 0,62$ m et $z = 30$ mm.

2 Roue autonome pour Fauteuil - EZ Wheel - CCinp MP 2013

2.1 Présentation

La roue autonome *ez-Wheel* (prononcer « easy-wheel ») propose une solution simple pour tracter des équipements de manutention et de transport de charges, des véhicules légers et matériels médicaux (FIGURE2). L'avantage de la solution *ez-Wheel* est d'être adaptable à la majorité des produits roulants qui existent sur le marché. Les dimensions et l'interface mécanique standardisées permettent une installation simple et immédiate. Le stator de la roue *ez-Wheel* est fixé sur le châssis de l'engin à déplacer et son rotor est assemblé directement sur sa roue.

La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, un contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur (FIGURE1).

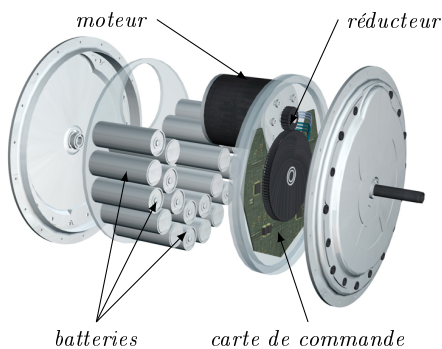


FIGURE 1 – Principaux éléments d'une roue *ez-Wheel*

FIGURE 2 – Prototype de fauteuil roulant équipé de deux *ez-Wheel*

Les différentes normes relatives à l'accessibilité des espaces publics aux personnes à mobilité réduite imposent certaines réalisations au niveau des accès des bâtiments. Les escaliers, infranchissables pour une personne en fauteuil roulant, doivent être remplacés ou complétés par des rampes d'accès. Ces rampes peuvent avoir une pente maximale de 12 % (soit environ 6,8°).

Objectif

L'objectif de l'étude proposée est d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant afin de vérifier si le fauteuil ainsi équipé respectera les normes d'accessibilité.

2.2 Modélisation

La FIGURE3 donne les dimensions du fauteuil motorisé et la FIGURE4 donne le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente.

Les hypothèses d'étude de cette partie sont :

- le référentiel $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, lié au sol, est supposé galiléen ;

- le fauteuil se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme un problème plan ;
- le référentiel $R_f(O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$ est lié au fauteuil avec $\vec{y}_0 = \vec{y}_f$;
- $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$ est l'action de la pesanteur avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
- le vecteur position du fauteuil est $\vec{OO}_f(t) = x(t) \cdot \vec{x}_f + R \cdot \vec{z}_f$;
- chaque moteur fournit le même couple, noté C_m (ils peuvent fournir 70 N.m au maximum) ; on supposera que le problème est équivalent à un seul moteur qui fournit un couple $2C_m$ sur une seule roue arrière ;
- l'ensemble $S = \{\text{fauteuil} + \text{roues motorisées} + \text{utilisateur}\}$ a une masse $M_S = 150 \text{ kg}$, son centre d'inertie est G ;
- le contact roue arrière/sol se fait avec frottement, on note f le coefficient de frottement ;
- l'inertie des roues et celle du moteur sont négligées ;
- l'inertie des roues étant faible devant les autres inerties, l'effort tangentiel (suivant \vec{x}_f) du sol sur les roues avant sera négligé ;
- les roues arrière sont en liaison pivot d'axe (O_f, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- les liaisons autres que les liaisons roue/sol sont considérées comme parfaites.

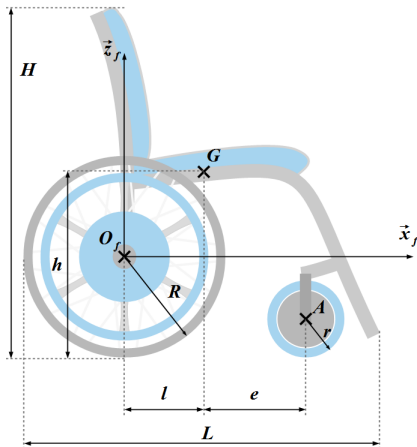


FIGURE 3 – Dimensions d'un fauteuil équipé de deux moteurs *ez-Wheel*

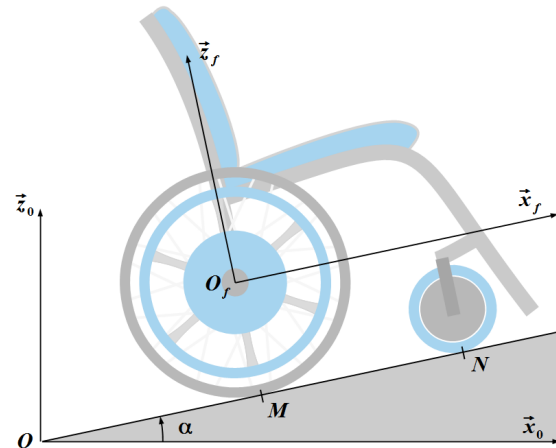


FIGURE 4 – Paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente

Les dimensions du fauteuil sont celles d'un fauteuil classique :

$$\begin{array}{llll}
 e = 400 \text{ mm} & h = 600 \text{ mm} & H = 1000 \text{ mm} & l = 200 \text{ mm} \\
 L = 1300 \text{ mm} & r = 150 \text{ mm} & R = 400 \text{ mm} &
 \end{array}$$

2.3 Travail demandé

Tout d'abord, nous allons vérifier que lorsque le moteur développe son couple maximal, les roues du fauteuil conservent l'adhérence et ne dérapent pas.

Question 1 Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques transmissibles en faisant apparaître les composantes nulles et le repère choisi :

1. du sol sur le fauteuil au niveau de la roue avant $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue avant}}\}$ au point N ,
2. du sol sur le fauteuil au niveau de la roue arrière $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue arrière}}\}$ au point M ,
3. et du poids sur le fauteuil $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \text{fauteuil}}\}$ au point G .

$$\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue avant}}\} = \underset{N}{\begin{Bmatrix} Z_N \cdot \vec{z}_f \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue arriere}}\} = \underset{M}{\begin{Bmatrix} X_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \text{fauteuil}}\} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} -M_S g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Question 2 Donner l'expression du moment dynamique de l'ensemble **S** par rapport au repère R_0 au point G noté $\overrightarrow{\delta_{G \in S/R_0}}$. Sachant que l'inertie des roues et des moteurs est négligée, et que l'ensemble **S** a une masse M_S , on a :

$$\overrightarrow{\delta_{G \in S/R_0}} = \overrightarrow{\delta_{G \in \text{fauteuil} + \text{conducteur}/0}} + \overrightarrow{\delta_{G \in \text{roues motorisées}/0}} \approx \overrightarrow{\delta_{G \in \text{fauteuil} + \text{conducteur}/0}}$$

Or le conducteur et le fauteuil sont en translation / R_0 , donc, en G : $\overrightarrow{\delta_{G \in \text{fauteuil} + \text{conducteur}/0}} = \vec{0}$

Question 3 En supposant que le contact entre les roues arrières et le sol se fait à la limite du glissement, écrire les trois équations scalaires du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble **S** en projection dans R_f au point G . Pour appliquer le PFD à l'ensemble **S** en G , on déplace tous les torseurs d'actions mécaniques extérieures en G :

- $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue avant}}\} = \underset{N}{\begin{Bmatrix} Z_N \cdot \vec{z}_f \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} Z_N \cdot \vec{z}_f \\ -e Z_N \cdot \vec{y}_f \end{Bmatrix}}$
- $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue arriere}}\} = \underset{M}{\begin{Bmatrix} f Z_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} f Z_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f \\ (-hf + l) Z_M \cdot \vec{y}_f \end{Bmatrix}}$

à la limite du glissement (l'action tangentielle est dirigée selon $+\vec{x}_f$ pour apporter une action motrice pour monter la pente)

On applique le PFD à **S** dans son mouvement par rapport à R_0 :

Eq. résultante sur \vec{x}_f : $f Z_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}$

Eq. résultante sur \vec{z}_f : $Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$

Eq. moment en G sur \vec{y}_f : $(-hf + l) Z_M - e Z_N = 0$

Question 4 En déduire l'accélération maximale du fauteuil $\ddot{x}(t)$ pour être à la limite du glissement. Faire l'application numérique pour une pente de béton mouillé de 12% ($f = 0,45$). On peut résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$Z_N = \frac{l - hf}{e} Z_M \quad \text{et} \quad Z_M = \frac{e}{l + e - fh} M_S g \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{ef}{l + e - fh} g \cos \alpha + g \sin \alpha$$

Pour une pente de 12% : $\tan \alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow \alpha = -6,8^\circ$

Avec $f = 0,45$, on en déduit : $\ddot{x} = 4,15 \text{ m.s}^{-2}$

Question 5 En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue arrière, déterminer l'expression du couple moteur C_m en fonction de l'accélération $\ddot{x}(t)$. Faire l'application numérique dans les conditions de limite de glissement. On isole la roue arrière, soumise aux actions mécaniques

- du sol : $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue arriere}}\} = \underset{M}{\begin{Bmatrix} f Z_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{O_f}{\begin{Bmatrix} f Z_M \cdot \vec{x}_f + Z_M \cdot \vec{z}_f \\ -R f Z_M \cdot \vec{y}_f \end{Bmatrix}}$
- de la liaison pivot d'axe (O_f, \vec{y}_f) avec le fauteuil

• du moteur sur l'axe (O_f, \vec{y}_f) : $\{\mathcal{T}_{\text{moteur} \rightarrow \text{roue arri\`ere}}\} = \begin{matrix} \vec{0} \\ 2C_m \cdot \vec{y}_f \end{matrix}$

On applique le PFD en moment sur l'axe (O_f, \vec{y}_f) , ce qui permet notamment de ne pas faire apparaître d'inconnues de la liaison pivot dans l'équation : $\overrightarrow{\delta_{O_f \in \text{roue arri\`ere}/0}} \cdot \vec{y}_f = 0 = 2C_m - RfZ_M$

D'où : $2C_m = RfZ_M$ et d'autre part $fZ_M = M_S(\ddot{x} - g \sin \alpha) \Rightarrow C_m = \frac{RM_S}{2}(\ddot{x} - g \sin \alpha)$

Avec $\ddot{x} = 4,15 \text{ m.s}^{-2}$, on obtient : $C_m = 159,4 \text{ N.m}$

Cette valeur limite étant largement aux 70 N.m que peut fournir chaque moteur, le fauteuil **ne glissera pas** sur une pente de 12% au démarrage.

Question 6 Pour cette valeur de C_m , déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de l'action mécanique du sol sur la roue avant. Conclure sur le comportement du fauteuil dans une telle configuration. On a vu que, à la limite du glissement, $Z_N = \frac{l-hf}{e}Z_M$ et $Z_M = \frac{2C_m}{Rf}$, d'où $Z_N = \frac{l-hf}{e} \frac{2C_m}{Rf}$. On obtient $Z_N = -311 \text{ N} < 0$, ce qui est impossible physiquement : il n'y a plus de contact entre le sol et les roues avant et le fauteuil bascule avant d'atteindre la limite du glissement. On suppose, pour la question suivante, que le contact entre les roues arrière et le sol se fait toujours avec frottement mais qu'il n'est plus à la limite de glissement. On suppose, de plus, que le couple moteur est de 70 N.m sur chacune des deux roues motorisées.

Question 7 Calculer l'accélération du fauteuil. Les moteurs, mis en place sur le fauteuil, permettent-ils de respecter les normes d'accès au bâtiment ? Le fauteuil risque-t-il de basculer ?

Les roues arrière ne sont plus à la limite du glissement, donc $X_M < fZ_M$.

En reprenant l'équation obtenue à la Q5, on a : $0 = 2C_m - RX_M \Rightarrow X_M = \frac{2C_m}{R} = 350 \text{ N}$

En reprenant l'équation de Q3, en résultante sur \vec{x}_f : $X_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}$

Soit : $\ddot{x} = \frac{2C_m}{M_S R} + g \sin \alpha = 1,17 \text{ m.s}^{-2}$

En reprenant les équations obtenues à la Q3, en résultante sur \vec{z}_f et en moment en G sur \vec{y}_f , on a :

- $Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$
- $-hX_M + lZ_M - eZ_N = 0$

D'où : $Z_M = M_S g \cos \alpha - Z_N$ et $-hX_M + l(M_S g \cos \alpha - Z_N) - eZ_N = 0$.

Finalement : $Z_N = \frac{1}{l+e} \left(lM_S g \cos \alpha - h \frac{2C_m}{R} \right) = 137 \text{ N} > 0$

Le fauteuil **ne bascule pas**, il respecte les normes d'accès au bâtiment.

3 Centrifugeuse géotechnique

La géotechnique correspond aux activités liées aux applications de la mécanique des sols, de la mécanique des roches et de la géologie. À partir d'essais en laboratoire et *in situ*, la géotechnique fournit aux constructeurs de bâtiments et d'ouvrages, les données indispensables pour le génie civil en ce qui concerne leur stabilité en fonction des sols. Aujourd'hui, la modélisation physique d'ouvrage géotechnique en centrifugeuse est une approche expérimentale répandue. La centrifugation des modèles réduits permet de reproduire des états de contraintes dans les matériaux semblables à ceux régnant dans l'ouvrage grandeur nature. Le laboratoire central des Ponts et Chaussées (LCPC) de Nantes possède une centrifugeuse géotechnique dont les principales caractéristiques sont données ci-après :

- distance de l'axe à la plate-forme nacelle : 5.5 m ;
- longueur du bras : 6.8 m ;
- accélération maximale : $200 \times g \text{ m/s}^2$;
- temps de montée à $200 \times g$: 360 s.

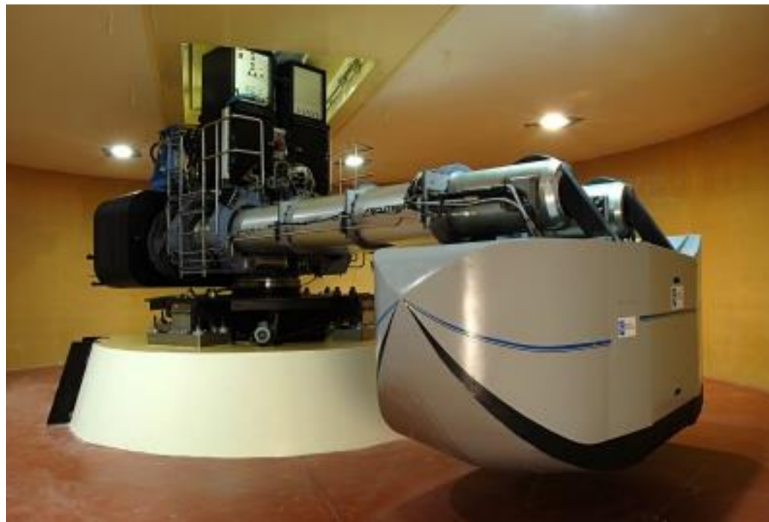


FIGURE 5 – Centrifugeuse géotechnique du LCPC de Nantes.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti **0** de la centrifugeuse. L'axe (O, \vec{z}) est dirigé suivant la verticale descendante. On désigne par $\vec{g} = g\vec{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Le bras **1** est en liaison pivot sans frottement, d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti **0**. Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au bras **1**. On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\alpha = \omega \times t$, où ω est une constante positive. Cette liaison est motorisée à l'aide d'un moteur délivrant un couple $C_m \vec{z}$.

La nacelle **2** est en liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bras **1**, telle que $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$ (a est une constante positive). Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à la nacelle **2**. On pose $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

On note :

Bras 1 :

- moment d'inertie I par rapport à l'axe (O, \vec{z}) ;

Nacelle 2 :

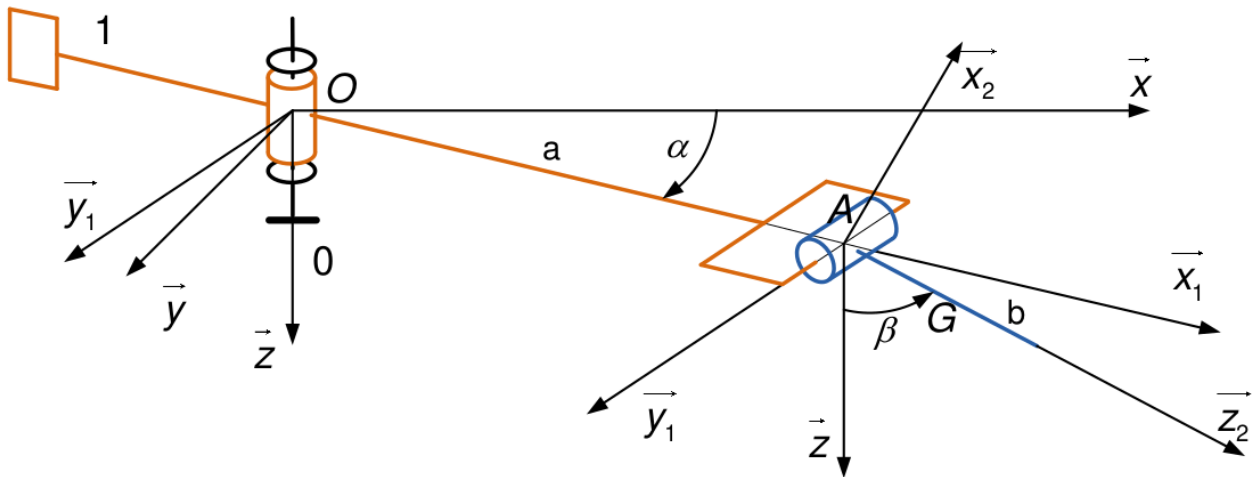


FIGURE 6 – Schéma cinématique de la centrifugeuse.

- centre d'inertie G , tel que $\overrightarrow{AG} = b\vec{z}_2$ (b est une constante positive) ;
- masse m
- matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_{(A,2)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)}$

Objectif : déterminer les équations du mouvement de la centrifugeuse.

Question 1 Déterminer, par application du principe fondamental de la dynamique, les équations du mouvement du mécanisme étudié lorsque le bras **1** tourne à la vitesse constante ω .

En supposant que $m \times b \times a \gg A \gg C$.

Question 2 Déterminer l'expression de l'angle β , lorsque la nacelle **2** est en équilibre relatif stable par rapport au bras **1**. Que vaut alors le couple moteur C_m ?

Q1

Le mécanisme possède un degré de mobilité égal à deux, il est donc nécessaire de trouver deux équations du mouvement indépendantes.

- 1^{ère} équation du mouvement :

On isole la nacelle 2 et on écrit le Théorème du moment dynamique appliqué à 2 au point A et en projection sur \vec{y}_1 .

$$-mgb \sin \beta = B\ddot{\beta} + \omega^2 \cos \beta (\sin \beta (C - A) - mba)$$

- 2^{ème} équation du mouvement :

On isole l'ensemble $E = \text{bras 1} + \text{nacelle 2}$ et on écrit le Théorème du moment dynamique appliqué à E au point O et en projection sur \vec{z} .

$$C_m = 2\omega\dot{\beta} \cos \beta (\sin \beta (A - C) + mba)$$

Q2

Lorsque la nacelle 2 est en équilibre relatif stable par rapport au bras 1 , on a : $\beta = \text{cte} \Rightarrow \dot{\beta} = 0$

Les deux équations du mouvement sont donc :

$$(1) \Rightarrow -mgb \sin \beta = -\omega^2 \cos \beta mba \text{ en supposant que } mba \gg AC$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \tan \beta = \frac{\omega^2 a}{g} \Rightarrow \beta = \arctan \left(\frac{\omega^2 a}{g} \right) \quad (1) \text{ et } (2) \Rightarrow C_m = 0$$

4 Banc d'essai vibrant

Les vibrations se retrouvent dans tous les systèmes et nuisent à leur durée de vie. On s'intéresse à un banc d'essai (*c.f.* FIGURE 7) permettant d'étudier les conséquences de ces vibrations sur l'usure et la fatigue des pièces mécaniques.



FIGURE 7 – Banc d'essai vibrant

La FIGURE 8 représente un modèle cinématique du dispositif étudié. Une modélisation plane a été retenue.

Le bâti vibrant est modélisé par un solide S_1 , de masse m_1 , en liaison glissière parfaite avec un support S_0 , fixe par rapport à un repère R_0 supposé galiléen.

Le solide S_1 est rappelé par un ressort de longueur libre l_0 et de raideur k .

Une masse ponctuelle m_2 excentrée, placée en P , tourne sur un rayon r et est entraînée à vitesse constante Ω . Elle modélise le balourd¹ du rotor d'un moteur S_2 .

1. Le balourd est un terme de mécanique classique caractérisant une masse non parfaitement répartie sur un volume

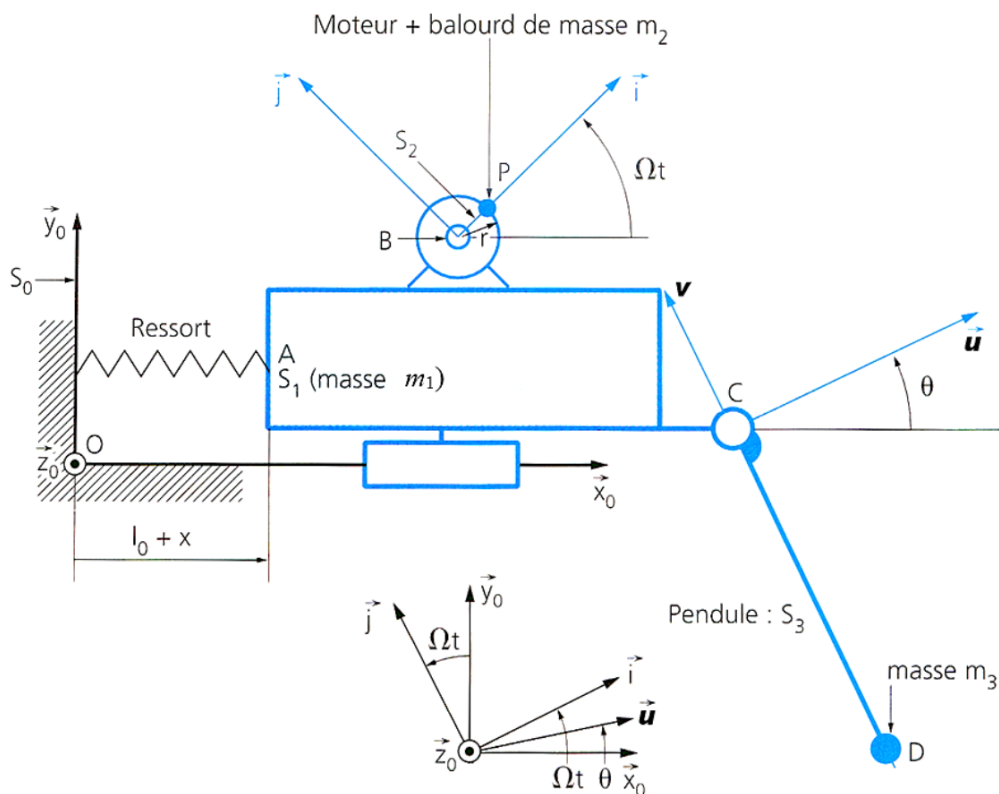


FIGURE 8 – Schéma cinématique et paramétrage du banc d'essai vibrant

Un pendule simple, de longueur L , porte à son extrémité D une masse concentrée m_3 , l'ensemble constitue le solide S_3 , en liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) avec S_1 .

Les masses autres que m_1 , m_2 et m_3 sont négligées devant ces dernières.

Objectif : déterminer les deux équations différentielles liant les degrés de liberté x et θ .

Question 1 Par application du principe fondamental de la dynamique à deux isolements consécutifs, déterminer deux équations différentielles liant x , θ , leurs dérivées et les paramètres cinétiques et cinématiques utiles.

On cherche une solution du système d'équations différentielles déterminé précédemment autour de la position d'équilibre $(x, \theta) = 0$

Question 2 Proposer une linéarisation, à l'ordre 1, des deux équations différentielles précédentes.

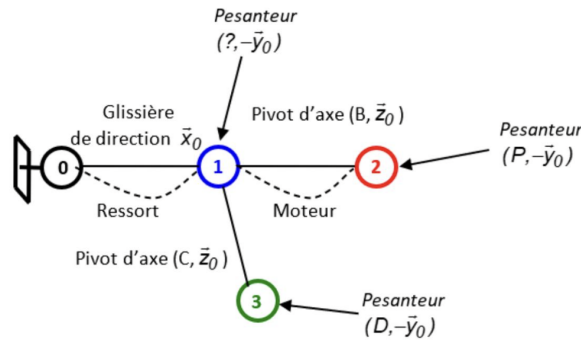
On s'intéresse uniquement au régime d'oscillations forcées. On cherche donc des solutions de la forme $x(t) = A \cos(\Omega t)$ et $\theta(t) = B \cos(\Omega t)$.

Question 3 Déterminer le système d'équations permettant de calculer A et B .

On souhaite supprimer les vibrations du bâti vibrant.

Question 4 Indiquer la condition que doit vérifier la longueur L afin d'assurer $x(t) = 0$ en régime forcé.

de révolution entraînant un déséquilibre



Q1

- 1^{ère} équation différentielle du mouvement : De manière assez logique, une première équation est obtenue l'ensemble des solides en translation (1, 2 et 3). On isole 1+2+3. La liaison entre 0 et 1 nous embête : on choisit l'équation du PFD qui permet de sélectionner la composante nulle de cette liaison. Théorème de la résultante dynamique appliqué à 1 + 2 + 3, en projection sur \vec{x}_0 : $\vec{R}_{d1+2+3/0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{F}_{1+2+3 \rightarrow 1+2+3} \cdot \vec{x}_0$

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

$$\left\{ \begin{matrix} \mathcal{T}_{0 \rightarrow 1} \\ \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{0 \rightarrow 1} \\ M_{P,0 \rightarrow 1} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \mathcal{T}_{pes \rightarrow 1} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{matrix} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \mathcal{T}_{pes \rightarrow 2} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{pes \rightarrow 3} \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{matrix} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$$



Remarque

Il ne faut pas oublier le torseur de la liaison glissière entre 1 et 0. Celui-ci doit être différencié de celui du ressort installé en parallèle de cette liaison.

Ce n'est pas parce qu'une composante d'action mécanique est nulle qu'il ne faut pas l'évoquer. En l'occurrence, c'est la nullité d'une composante de résultante des actions mécaniques transmissible par cette liaison glissière qui justifie que seul le TRD en projection sur la direction de cette liaison permet de trouver l'équation recherchée.

Calcul de la résultante dynamique :

$$\vec{R}_{d1+2+3/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \dot{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 + m_2 \dot{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \dot{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0$$

Avec :

$$m_1 \vec{\Gamma}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0 = m_1 \left(\left[\frac{d\vec{V}_{G_1 \in 1/0} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right] - \underbrace{\vec{V}_{G_1 \in 1/0} \cdot \left[\frac{d\vec{x}_0}{dt} \right]_0}_0 \right) = m_1 \ddot{x}_0$$

$$\text{Car : } \vec{V}_{G_1 \in 1/0} = \dot{x}_0 \vec{x}_0$$

$$m_2 \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 = m_2 \left(\left[\frac{d\vec{V}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right] - \underbrace{\vec{V}_{G_2 \in 2/0} \cdot \left[\frac{d\vec{x}_0}{dt} \right]_0}_0 \right) = m_2 (\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t))$$

$$\text{Car : } \vec{V}_{G_2 \in 2/0} = \vec{V}_{G_2 \in 2/1} + \vec{V}_{G_2 \in 1/0} = \vec{G}_2 \vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} + \dot{x}_0 \vec{x}_0 = -r\vec{i} \wedge \Omega \vec{z}_0 + \dot{x}_0 \vec{x}_0 = r\Omega \vec{j} + \dot{x}_0 \vec{x}_0$$

$$m_3 \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0 = m_3 \left(\left[\frac{d\vec{V}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0}{dt} \right] - \underbrace{\vec{V}_{G_3 \in 3/0} \cdot \left[\frac{d\vec{x}_0}{dt} \right]_0}_0 \right) = m_3 (\ddot{x} + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$\text{Car : } \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/1} + \vec{V}_{G_3 \in 1/0} = \overrightarrow{G_3 C} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} + \dot{x}\vec{x}_0 = L\vec{v} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_0 + \dot{x}\vec{x}_0 = L\dot{\theta}\vec{u} + \dot{x}\vec{x}_0$$

$$\text{Par ailleurs, on a : } \vec{R}_{d1+2+3/0} \cdot \vec{x}_0 = -kx$$

$$\text{On a donc : } -kx = m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - r\Omega^2 \cos(\Omega t)) + m_3(\ddot{x} + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} \cos \theta - m_3L\dot{\theta}^2 \sin \theta = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

- 2^{ème} équation différentielle du mouvement :

On isole 3. Inventaire des actions mécaniques extérieures :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \forall P \in (C, \vec{z}_0) \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \end{array} \right. \text{ avec } \vec{M}_{P, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0 \quad \left. \{T_{\text{pes} \rightarrow 3}\} \right\}_{\forall P \in (G_3, \vec{y}_0)} \left\{ \begin{array}{l} -m_3g\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

Théorème du moment dynamique appliqué à 3, au point C, en projection sur \vec{z}_0 : $\vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \vec{z}_0} \cdot \vec{z}_0$

Les moment cinétique et dynamique d'une masse supposée ponctuelle sont nuls au point où est concentrée la masse.

La démarche pour déterminer $\vec{\delta}_{C, 3/0}$ est donc :

$$\text{Or : } \left[\frac{d\vec{V}_{G_3 \in 3/0}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(L\dot{\theta}\vec{u} + \dot{x}\vec{x}_0)}{dt} \right]_0 = L\ddot{\theta}\vec{u} + L\dot{\theta} \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_0 + \ddot{x}\vec{x}_0 = \ddot{x}\vec{x}_0 + L\ddot{\theta}\vec{u} + L\dot{\theta}^2\vec{v}$$

$$\text{Car : } \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_0 = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{u} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \dot{\theta}\vec{v}$$

$$\text{Soit : } \vec{\delta}_{C, 3/0} \cdot \vec{z}_0 = \left(-L\vec{v} \wedge m_3(\ddot{x}\vec{x}_0 + L\ddot{\theta}\vec{u} + L\dot{\theta}^2\vec{v}) \right) \cdot \vec{z}_0 = m_3L(\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta})$$

$$\text{Par ailleurs, on a : } \vec{M}_{C, \vec{z}_0} \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_{C, \text{pes} \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = \left(\overrightarrow{CG_3} \wedge -m_3g\vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = [-L\vec{v} \wedge -m_3g\vec{y}_0] \cdot \vec{z}_0 = -m_3gL \sin \theta$$

$$\text{On a donc : } -m_3gL \sin \theta = m_3L[\ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta}] \Rightarrow \ddot{x} \cos \theta + L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

Q2

En considérant des petits mouvements à faible vitesse autour de la position d'équilibre, on a : $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$ et $\dot{\theta}^2 \approx 0$

$$\text{Soit : } (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + kx + m_3L\ddot{\theta} = m_2r\Omega^2 \cos \Omega t \text{ et } \ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

Q3

En posant $x(t) = A \cos \omega t$ et $\theta(t) = B \cos \omega t$, on a :

$$\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t) \text{ et } \ddot{\theta}(t) = -B\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Les deux équations obtenues précédent s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2 + m_3)A\Omega^2 \cos(\Omega t) + kA \cos(\Omega t) - m_3LB\Omega^2 \cos(\Omega t) = m_2r\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - LB\Omega^2 \cos(\Omega t) + gB \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \begin{cases} [-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k]A - m_3L\Omega^2B = m_2r\Omega^2 \\ -A\Omega^2 + (-L\Omega^2 + g)B = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{(-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k)(-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4} \quad B = \frac{m_2r\Omega^4}{(-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k)(-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

Q4

On a $x(t) = 0$ en régime forcé, si $A = 0$.

$$\text{Ce qui implique que : } A = \frac{m_2r\Omega^2(-L\Omega^2 + g)}{(-(m_1 + m_2 + m_3)\Omega^2 + k)(-L\Omega^2 + g) - m_3L\Omega^4}$$

Soit : $L = \frac{g}{\Omega^2}$