ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 10/02/25

Préparation à l'interrogation n°18

1 Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire inverse

1. Dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour $(x,y)\in\mathbb{K}^2$, on a
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|\quad\text{et}\quad\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|$$
2. Plus généralement, dans E un $\mathbb{K}$-ev normé, pour $(x,y)\in\mathrm{E}^2$, on a
$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad\text{et}\quad\big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x-y\|$$

2 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de
$$\begin{aligned}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}&=t\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\mathrm{o}(t^3)-1\right)^{-1}\\&=\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\mathrm{o}(t^2)\right)^{-1}=1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\mathrm{o}(t^2)=1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{12}+\mathrm{o}(t^2)\end{aligned}$$
2. Équivalent en $+\infty$ de $\mathrm{th}\,(t)-1$.

3 Trigonométrie

1. $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2=\dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

4 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x\sin(t)^2\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

5 Exercice type

$$\forall \mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\qquad\exp(\mathrm{A})\in\mathbb{K}[\mathrm{A}]$$

Corrigé : La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)_{\mathrm{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ sev de dimension finie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc fermé de cet espace et comme la suite est convergente, sa limite appartient à $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\in\mathbb{K}[\mathrm{A}]}$$

6 Exercice type

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$$

Corrigé : On se place dans $\mathbb{C}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$. Il s'ensuit

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}) + \mathrm{Q}$$

avec Q triangulaire supérieure stricte. Par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}}$$

7 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{F} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La norme $\|\cdot\|_1$ vérifie pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$

$$\|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{B}\|_1 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{AX}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{X}\|_1$$

Corrigé : Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{F}$. On a

$$\|\mathrm{AB}\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n} |a_{i,j}|\,|b_{k,l}|$$

et

$$\|\mathrm{AX}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} |a_{i,j}|\,|x_k|$$

d'où

$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{X}) \in \mathrm{E}^2 \times \mathrm{F} \qquad \|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{B}\|_1 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{AX}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{X}\|_1}$$

8 Questions de cours

Calcul différentiel (début), développements en série entière usuels, graphes usuels.