ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°75

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $\mathrm{F} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{F}(\mathrm{P}) = \int_0^1 f(t, \mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

Corrigé : Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$. Montrons que pour tout $j \in [\![0\,;\, n]\!]$, l'application $a_j \mapsto \int_0^1 f\left(t, \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$. On fixe $j \in [\![0\,;\, n]\!]$ et on pose

$$\forall (t, a_j) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{R} \qquad g(t, a_j) = f\left(t, \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)$$

• Pour a_j réel, on a $t \mapsto g(t, a_j)$ continue et intégrale sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

• Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $a_j \mapsto g(t, a_j) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathrm{R})$ par composition. Par dérivation composée, on trouve

$$\forall (t, a_j) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{R} \qquad \frac{\partial g}{\partial a_j}(t, a_j) = t^j \partial_2 f\left(t, \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)$$

• Pour a_j réel, on a $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a_j}(t, a_j)$ continue sur $[\,0\,;1\,]$ par théorèmes généraux.

• **Domination :** Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}$. L'application $(t, a_j) \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a_j}(t, a_j)$ est continue par composition et continuité des dérivées partielles de f. Sur le compact $[\,0\,;1\,] \times [\,a\,;b\,]$, l'application $(t, a_j) \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a_j}(t, a_j)$ est bornée donc dominée.

D'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, l'application $a_j \mapsto \int_0^1 g(t, a_j)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \forall j \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_j}(\mathrm{P}) = \int_0^1 t^j \partial_2 f(t, \mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$$

Il reste à montrer la continuité des dérivées partielles sur E. Soit $j \in [\![0\,;\, n]\!]$.

• Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, l'application $t \mapsto t^j \partial_2 f(t, \mathrm{P}(t))$ est continue (par morceaux) sur $[\,0\,;1\,]$.

• Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, l'application $\mathrm{P} \mapsto t^j \partial_2 f(t, \mathrm{P}(t))$ est continue sur E puisque le morphisme d'évaluation $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(t)$ est continu (linéaire en dimension finie) composé avec $y \mapsto t^j \partial_2 f(t, y)$ continue puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$.

• **Domination :** Soit K un compact de E. L'application $(t, \mathrm{P}) \mapsto t^j \partial_2 f(t, \mathrm{P}(t))$ est continue car composée de fonctions continues et est bornée donc dominée sur le compact $[\,0\,;1\,] \times \mathrm{K}$ (produit de compacts).

D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on a $\mathrm{P} \mapsto \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_j}(\mathrm{P})$ continue sur E pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$. On en déduit le caractère $\mathscr{C}^1$ de F puis

$$\forall \mathrm{H} = \sum_{j=0}^{n} h_k \mathrm{X}^j \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{dF}(\mathrm{P}) \cdot \mathrm{H} = \sum_{j=0}^{n} h_j \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a_j}(\mathrm{P}) = \sum_{j=0}^{n} h_j \int_0^1 t^j \partial_2 f(t, \mathrm{P}(t))\, \mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \forall (\mathrm{P}, \mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{dF}(\mathrm{P}) \cdot \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{H}(t) \partial_2 f(t, \mathrm{P}(t))\, \mathrm{d}t}$$

Exercice 2 (***)

On pose $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{(x^4 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier la continuité puis le caractère $\mathscr{C}^1$ de f.

Corrigé : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$ en tant que fonction rationnelle bien définie sur ce domaine. Avec l'équivalence

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x^2 - |y|)^2 \geqslant 0 \iff x^4 + y^2 \geqslant 2x^2 |y|$$

il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\} \qquad |f(x, y) - f(0, 0)| = \underbrace{\frac{x^2 |y|}{x^4 + y^2}}_{\leqslant 1/2} \frac{|x|\, y^2}{x^4 + y^2} \leqslant \frac{|x|}{2} \frac{y^2}{x^4 + y^2} \leqslant \frac{|x|}{2}$$

Il en résulte $\qquad f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} f(0, 0)$

D'où la continuité de f.

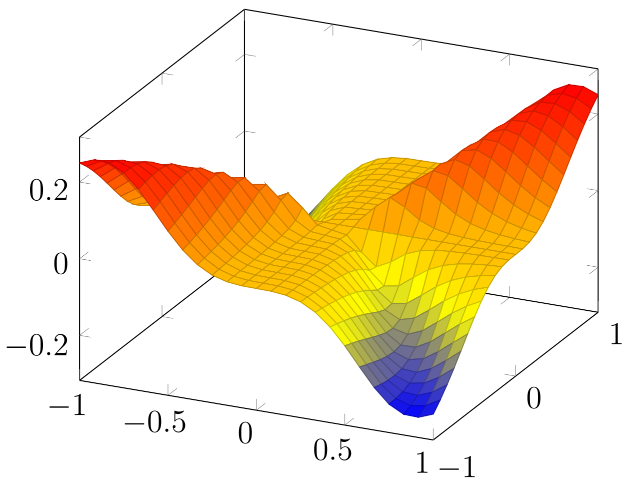

Figure 1 – Graphe de $z = f(x, y)$

Puis, on a $$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Et après calcul, on complète avec

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3(3y^2-5x^4)}{(x^4+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier $$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,x^2) = -\frac{1}{4} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

On conclut $$\boxed{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \smallsetminus \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$$

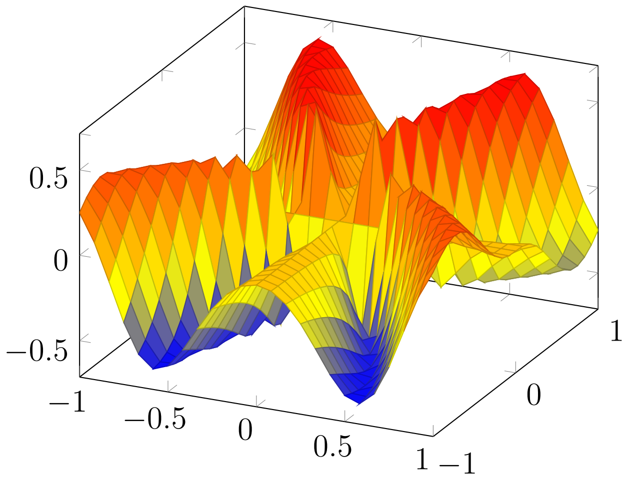

FIGURE 2 – Graphe de $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Exercice 3 (***)

On munit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme vérifiant $\|\mathrm{I}_n\| = 1$ et $\|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$ pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Montrer $$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{B}}(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $\mathrm{R} > 0$. Montrer
$$\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})^2 \qquad \|\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}\| \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{R}}\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|$$

3. En déduire que l'exponentielle est différentiable sur E avec
$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{d}\exp(\mathrm{A})\cdot\mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On observe
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\right] = \mathrm{e}^{t\mathrm{B}}\mathrm{B}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{t\mathrm{B}}(-\mathrm{A})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{t\mathrm{B}}(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}$$

Ainsi $$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{B}}(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t}$$

2. Soit $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})^2$. D'après l'égalité précédente, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - \mathrm{e}^{\mathrm{Y}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{X}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{Y}}\,\mathrm{d}t$$

Puis, par inégalité triangulaire

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}\| \leqslant \int_0^1 \|\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{Y}}\|\,\mathrm{d}t$$

D'après le caractère sous-multiplicatif de la norme, on a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{Y}}\| \leqslant \|\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\|\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|\|\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{Y}}\|$$

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On a $\|\mathrm{M}^k\| \leqslant \|\mathrm{M}\|^k$ pour tout k entier par récurrence immédiate puis, par convergence de $\sum \dfrac{\|\mathrm{M}\|^k}{k!}$, on obtient la convergence absolue de $\sum \dfrac{\mathrm{M}^k}{k!}$ et par inégalité triangulaire

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{M}}\| = \|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{M}\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{\|\mathrm{M}\|}$$

Ainsi $\qquad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \|\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{Y}}\| \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{R}}\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{\mathrm{R}}\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|$

On conclut $\qquad \boxed{\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})^2 \qquad \|\mathrm{e}^{\mathrm{X}} - \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}\| \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{R}}\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|}$

3. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2$. Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{H}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{H})}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{H})} - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\right)\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{H}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t\| \leqslant \int_0^1 \|\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{H})} - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\right)\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\|\,\mathrm{d}t$$

Avec le caractère sous-multiplicatif et l'inégalité établie à la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{H}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t\| &\leqslant \int_0^1 \|\mathrm{e}^{t(\mathrm{A}+\mathrm{H})} - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\|\|\mathrm{H}\|\|\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|+\|\mathrm{H}\|}\|\mathrm{H}\|^2\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|} = \mathrm{o}(\mathrm{H})\end{aligned}$$

Enfin, l'application $\mathrm{H} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$ est linéaire par linéarité du produit à droite et à gauche et de l'intégrale et on conclut

$$\boxed{\text{L'exponentielle est différentiable sur E et} \quad \forall (\mathrm{A},\mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \quad \mathrm{d}\exp(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{H}\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t}$$

Variantes : (a) On peut procéder différemment. Pour $(\mathrm{A},\mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{H}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{H})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[\mathrm{A}^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^\ell\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell} + \mathrm{R}_k(\mathrm{A},\mathrm{H})\right]$$

La série $\sum \dfrac{\mathrm{A}^k}{k!}$ converge absolument. Puis, on a avec la norme d'algèbre

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^\ell\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell}\| \leqslant \frac{k}{k!}\|\mathrm{A}\|^{k-1}\|\mathrm{H}\| = \frac{\|\mathrm{A}\|^{k-1}}{(k-1)!}\|\mathrm{H}\|$$

d'où la convergence absolue de $\sum \dfrac{1}{k!}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^{\ell}\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell}\right]$. Par linéarité du symbole somme, on obtient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{H}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^{\ell}\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{R}_k(\mathrm{A},\mathrm{H})}{k!} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{R}_k(\mathrm{A},\mathrm{H}) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^{\ell}\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell}$$

qui converge absolument. En utilisant à nouveau le caractère de norme d'algèbre, on trouve

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{R}_k(\mathrm{A},\mathrm{H})\| \leqslant \mathrm{R}_k(\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{H}\|)$$

et $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_k(\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{H}\|) = (\|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{H}\|)^k - \|\mathrm{A}\|^k - k\|\mathrm{A}\|^{k-1}\|\mathrm{H}\|$$

d'où $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{R}_k(\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{H}\|)}{k!} = \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|+\|\mathrm{H}\|} - \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|} - \|\mathrm{H}\|\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|} = \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

Enfin, l'application $\mathrm{H} \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^{\ell}\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell}\right]$ est linéaire et on obtient

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction exponentielle est différentiable sur E et}\\ \forall (\mathrm{A},\mathrm{H}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \mathrm{d}\exp(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{H} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{A}^{\ell}\mathrm{H}\mathrm{A}^{k-1-\ell}\right]\end{array}}$$

(b) Pour les questions 2 et 3, on peut encore faire autrement. On a établi pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\mathrm{B}}(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{e}^{(1-t)\mathrm{A}}\,\mathrm{d}t$$

d'où $$\mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k\mathrm{B}^k}{k!}(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(1-t)^{\ell}\mathrm{A}^{\ell}}{\ell!}\,\mathrm{d}t$$

On peut justifier la permutation des symboles sommes et intégrale. On peut également généraliser les résultats des familles sommables pour des familles à valeurs vectorielles (hors-programme !) et invoquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{B}^k(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{A}^{\ell}\frac{1}{k!\ell!}\int_0^1 t^k(1-t)^{\ell}\,\mathrm{d}t$$

D'après un résultat d'intégration classique, on a

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \qquad \int_0^1 t^k(1-t)^{\ell}\,\mathrm{d}t = \frac{k!\ell!}{(k+\ell+1)!}$$

d'où $$\mathrm{e}^{\mathrm{B}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(k+\ell+1)!}\mathrm{B}^k(\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{A}^{\ell}$$

Avec de la sommation par paquets en posant $p = k+\ell$ puis $p = k+\ell+1$, on retrouve les résultats des questions 2 et 3.

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer $g'(x)$ pour x réel.

Corrigé : Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Avec le changement de variable $t = xu$ de classe $\mathscr{C}^1$, il vient

$$g(x) = \int_0^1 f(x, xu)x \,\mathrm{d}u = x\int_0^1 f(x, xu)\,\mathrm{d}u$$

La relation vaut aussi clairement pour $x = 0$. On note $\varphi(x, u) = f(x, xu)$ pour $(x, u) \in \mathbb{R}^2$. D'après la règle de la chaîne, on a $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, xu) + u\frac{\partial f}{\partial y}(x, xu)$$

Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation sous l'intégrale pour $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x, u)\,\mathrm{d}u$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $u \mapsto \varphi(x, u)$ intégrable sur $[\,0\,;1\,]$ (fonction continue sur un segment).
- D'après ce qui précède, on a pour $u \in [\,0\,;1\,]$, $x \mapsto \varphi(x, u)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $u \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u)$ continue sur $[\,0\,;1\,]$.
- **Domination :** On s'oriente vers une domination locale puisque rien ne permet d'envisager une domination globale. Pour $(x, u) \in [\,a\,;b\,] \times [\,0\,;1\,]$, la fonction $(x, u) \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u)$ est continue sur le compact $[\,a\,;b\,] \times [\,0\,;1\,]$ donc borné sur cet ensemble ce qui prouve la domination.

Ainsi, par théorème, on a $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x, u)\,\mathrm{d}u$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[\,a\,;b\,]$ donc sur $\mathbb{R}$ et par dérivation sous l'intégrale

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, xu) + u\frac{\partial f}{\partial y}(x, xu)\right]\,\mathrm{d}u$$

Par suite, on a $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, xu)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 f(x, xu)\,\mathrm{d}u + x\int_0^1 u\frac{\partial f}{\partial y}(x, xu)\,\mathrm{d}u$$

Avec le changement de variable $t = xu$ (en distinguant x nul et non nul), on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, xu)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 f(x, xu)\,\mathrm{d}u = [uf(x, xu)]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 xu\frac{\partial f}{\partial y}(x, xu)\,\mathrm{d}u$$

D'où
$$\int_0^1 f(x, xu)\,\mathrm{d}u + x\int_0^1 u\frac{\partial f}{\partial y}(x, xu)\,\mathrm{d}u = f(x, x)$$

On conclut

$$\boxed{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 5 (****)

Soit E euclidien avec $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que ∇f est surjective.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{E}$. On pose $\quad g\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \langle x, a\rangle \end{cases}$

avec $a \in \mathrm{E}$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x, a\rangle| \leqslant \|x\|\|a\|$ pour $x \in \mathrm{E}$, il vient

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \frac{|g(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(x)| - \langle x, a\rangle}{\|x\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} + \mathrm{O}(1) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

Il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\| > \mathrm{R} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|g(x)|}{\|x\|} \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| > \mathrm{R}$$

Notant $$\Gamma_{\mathrm{R}} = \{x \in \mathrm{E} \mid \|x\| > \mathrm{R}\}$$

On a donc $$g(\Gamma_{\mathrm{R}}) \subset \,]-\infty\,; -\mathrm{R}\,[\, \cup \,]-\mathrm{R}\,; +\infty\,[$$

Montrons que Γ_{R} est connexe par arcs. Soit $(x_1, x_2) \in \Gamma_{\mathrm{R}}^2$ avec (x_1, x_2) libre. On pose

$$\forall t \in [\,0\,; 1\,] \qquad \varphi(t) = \frac{\|x_1\|(1-t) + \|x_2\|t}{\|(1-t)x_1 + tx_2\|}\,[(1-t)x_1 + tx_2]$$

L'application φ est bien définie car le dénominateur ne s'annule pas par liberté de (x_1, x_2) et elle est continue sur $[\,0\,; 1\,]$ comme composée de telles fonctions. On a $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$ et

$$\forall t \in [\,0\,; 1\,] \qquad \|\varphi(t)\| = \underbrace{\|x_1\|}_{>\mathrm{R}}(1-t) + \underbrace{\|x_2\|}_{>\mathrm{R}}\,t > \mathrm{R}$$

ce qui prouve que φ est à valeurs dans Γ_{R}. Si (x_1, x_2) est liée, il suffit de choisir $y \in \Gamma_{\mathrm{R}}$ tel que (x_1, y) soit libre (choix possible car $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$) puis de relier x_1 à y et y à x_2 par le procédé précédent. L'ensemble Γ_{R} est donc connexe par arcs. L'image d'un connexe par arcs par une application continue étant également connexe par arcs, on a

$$g(\Gamma_{\mathrm{R}}) \subset \,]-\infty\,; -\mathrm{R}\,[\quad \text{ou} \quad g(\Gamma_{\mathrm{R}}) \subset \,]\,\mathrm{R}\,; +\infty\,[$$

Quitte à considérer $-g$, on peut supposer $g(\Gamma_{\mathrm{R}}) \subset \,]\,\mathrm{R}\,; +\infty\,[$. On en déduit $g(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. D'après un résultat classique (exercice 10 feuille 32), il s'ensuit que g admet un minimum global. L'ensemble E étant ouvert, il s'agit d'un point critique de g. Or, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \nabla g(x) = \nabla f(x) - a$$

Ainsi $$\forall a \in \mathrm{E} \qquad \exists x \in \mathrm{E} \quad | \quad \nabla f(x) - a = 0$$

On conclut $$\boxed{\text{La fonction } \nabla f \text{ est surjective.}}$$

Exercice 6 (****)

Soit n entier non nul et $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \big(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2) \quad \dots \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^n)\big)$$

1. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer le rang de $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ et le degré du polynôme minimal π_{M}.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : 1. Notons $\varphi_k : \mathrm{M} \to \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k)$ pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. L'application φ_k est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où $\varphi_k \in \mathscr{C}^1(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Pour $(\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a

$$\varphi_k(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1} + \mathrm{o}(\mathrm{H}))$$

d'où $$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}(\varphi_k)(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = k\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H})$$

Par suite

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}) & 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{MH}) & \ldots & n\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{n-1}\mathrm{H}) \end{pmatrix}}$$

Remarque : Pour le détail de $(\mathrm{M}+\mathrm{H})^k$ avec $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, étant donné qu'il n'y a pas commutation *a priori*, on peut établir par récurrence sur k la relation

$$(\mathrm{M}+\mathrm{H})^k = \sum_{j=0}^{k} \sum_{(i_0,\ldots,i_j) \in \mathbb{N}^{j+1} : \sum_{\ell=0}^{j} i_\ell = k-j} \mathrm{M}^{i_0}\mathrm{HM}^{i_1} \ldots \mathrm{HM}^{i_j}$$

et on en déduit

$$(\mathrm{M}+\mathrm{H})^k = \mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1} + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

2. On note $\mathscr{C} = (\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\psi_k : \mathrm{H} \mapsto (k+1)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k\mathrm{H})$ pour $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) &= \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M})(\mathscr{C}) = \mathrm{rg}\,(\psi_0(\mathscr{C}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathscr{C})) \\ &= \dim \mathrm{Vect}\,(\psi_0(\mathscr{C}), \ldots \psi_{n-1}(\mathscr{C})) = \dim \mathrm{Vect}\,(\psi_0, \ldots \psi_{n-1}) \end{aligned}$$

puisque $\psi_k \mapsto \psi_k(\mathscr{C})$ est un isomorphisme. Notons $m = \deg \pi_{\mathrm{M}}$. On a $\mathbb{R}[\mathrm{M}] = \mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{M}]$ d'où

$$\mathrm{Vect}\,(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}) = \mathrm{Vect}\,(\psi_0, \ldots, \psi_{m-1})$$

Supposons $(\psi_0, \ldots, \psi_{m-1})$ liée. Soit $(\alpha_i)_{i \in [\![0\,;\, m-1]\!]} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \psi_i = 0$. Il s'ensuit

$$\forall \mathrm{H} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=0}^{m-1} (i+1)\alpha_i \mathrm{M}^i\right)\mathrm{H}\right) = 0$$

En particulier, en choisissant $\mathrm{H} = \left(\sum\limits_{i=0}^{m-1} (i+1)\alpha_i \mathrm{M}^i\right)^\top$, on obtient $\sum\limits_{i=0}^{m-1} (i+1)\alpha_i \mathrm{M}^i = 0$ ce qui contredit $\deg \pi_{\mathrm{M}} = m$. Donc la famille est libre et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}}}$$

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_{\mathrm{A}} = n$. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{A}) = n$. Notant $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ extraite de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{A})$. Notons $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ les plages d'indices de cette extraction et on considère $\Phi : \mathrm{M} \to \det\,(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{M}))_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}}$. L'ensemble $\mathrm{U} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue avec $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ et tout élément de U est de rang supérieur ou égal à n et donc égal à n. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dont le polynôme minimal est de degré } n \text{ est un ouvert.}}$$