ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°73

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer sa différentielle.

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^3)$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer sa différentielle.

Exercice 3 (**)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ différentiable vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On définit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{P}) = \int_0^1 \sin \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien. Déterminer en quels points l'application $\|\cdot\|$ est différentiable et préciser le gradient en ces points.

Exercice 6 (*)

Soit E euclidien, $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ telle que $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

Exercice 7 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $h = (h_1, \ldots, h_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = f(x + th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$$

Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $g'(t)$ pour t réel.

Exercice 8 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ et g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[\times \mathbb{R}$ par

$$\forall (r,\theta) \in\,]\,0\,;+\infty\,[\times \mathbb{R} \qquad g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

1. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[\times \mathbb{R}$.
2. Exprimer les dérivées partielle de g en fonction de celles de f.
3. Exprimer les dérivées partielles de f évaluées en $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction de celles de g.

Exercice 9 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Quelles relations existe-t-il entre les dérivées partielles dans les cas suivants :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = f(y,x)$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = f(x+y, xy)$

Exercice 10 (*)

Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 11 (**)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ -\sin x & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 12 (**)

Soit E euclidien, $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \frac{1}{2}\langle u(x), x\rangle - \langle a, x\rangle$$

1. Montrer que f est différentiable et préciser sa différentielle.
2. Étudier les extremums de f.

Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{R} > 0$, déterminer l'espace tangent à la sphère $\mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ en un point de celle-ci.