ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°74

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{-1}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{U}$.

1. Justifier que U est un ouvert de E.
2. Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.
   On pourra commencer par une étude en I_n.

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.
2. Calculer $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)$ puis l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.
3. Déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir $\mathrm{d}f(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

Exercice 3 (***)

Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe*, si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{U}^2 \qquad \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On suppose f différentiable sur U. Montrer

$$f \text{ convexe} \iff \forall (x, y) \in \mathrm{U}^2 \qquad f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$$

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ et on pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}* \times \mathbb{R} \\ f(0)(y - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{E}$, la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ est injective puis bijective.
3. Soit $b \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \|f(x) - b\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
   (a) Justifier que g atteint un minimum m sur E.
   (b) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}g(a) \cdot h$ pour $(a, h) \in \mathrm{E}^2$.
   (c) Conclure que f est bijective. Que peut-on dire sur f^{-1} ?

Exercice 7 (***)

Soit $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad xy \neq 1\}$. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D} \qquad f(x, y) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

1. Justifier que D est un ouvert puis décrire ses composantes connexes par arcs.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 8 (***)

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ est différentiable et préciser sa différentielle.
2. On pose $$\Phi : \begin{cases} \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\langle x, u(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

   Montrer que Φ est différentiable sur $\mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$ et l'équivalence pour $a \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$

   $$\mathrm{d}\Phi(a) = 0 \iff a \text{ vecteur propre de } u$$

Exercice 9 (***)

Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et le caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions suivantes :

1. $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^3) - \cos(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. $$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$