ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°75

Exercice 1 (***)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $F : E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall P \in E \qquad F(P) = \int_0^1 f(t, P(t))\, dt$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

Indications : Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, établir le caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre $a_j \mapsto \int_0^1 f\left(t, \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) dt$ puis établir la continuité des dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial a_j}$ pour $j \in [\![0\,;\, n]\!]$.

Exercice 2 (***)

On pose $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{(x^4 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier la continuité puis le caractère $\mathscr{C}^1$ de f.

Indications : Utiliser l'inégalité $(x^2 - |y|)^2 \geqslant 0$ pour la continuité puis considérer une direction particulier pour une dérivée partielle.

Exercice 3 (***)

On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme vérifiant $\|I_n\| = 1$ et $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ pour $(A, B) \in E^2$.

1. Montrer $\qquad \forall (A, B) \in E^2 \qquad e^B - e^A = \int_0^1 e^{tB}(B - A)e^{(1-t)A}\, dt$
2. Soit $R > 0$. Montrer
$$\forall (X, Y) \in B_f(0, R)^2 \qquad \|e^X - e^Y\| \leqslant e^R \|X - Y\|$$
3. En déduire que l'exponentielle est différentiable sur E avec
$$\forall (A, H) \in E^2 \qquad d\exp(A) \cdot H = \int_0^1 e^{tA} H e^{(1-t)A}\, dt$$

Indications : 1. Reconnaître une dérivée sous l'intégrale.
2. Utiliser l'égalité de la question précédente.
3. Pour $(A, H) \in E^2$, considérer $e^{A+H} - e^A - \int_0^1 e^{tA} H e^{(1-t)A}\, dt$ et contrôler cette quantité.

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer $g'(x)$ pour x réel.

Indications : Avec un changement de variable, transformer l'écriture de g de sorte que les bornes de l'intégrale soient constantes.

Exercice 5 (****)

Soit E euclidien avec $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que ∇f est surjective.

Indications : Pour $a \in \mathrm{E}$, considérer $g : x \mapsto f(x) - \langle x, a \rangle$ et vérifier que g satisfait les mêmes hypothèses que f. Établir que pour $\mathrm{R} > 0$, l'ensemble $\Gamma_{\mathrm{R}} = \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ est connexe par arcs puis considérer $g(\Gamma_{\mathrm{R}})$ et utiliser le résultat de l'exercice 11 feuille 32.

Exercice 6 (****)

Soit n entier non nul et $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2) & \ldots & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^n) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Comparer le rang de $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ et le degré du polynôme minimal π_{M}.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Indications : 1. Notant $\varphi_k : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k)$, déterminer le développement limité de $\varphi_k(\mathrm{M} + \mathrm{H})$.
2. Notant $\psi_k : \mathrm{H} \mapsto (k+1)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k\mathrm{H})$, comparer pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ les quantités $\mathrm{rg}\,\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ avec $\dim \mathrm{Vect}\,(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1})$. Utiliser ensuite le fait que $\mathbb{R}[\mathrm{M}] = \mathbb{R}_{m-1}[\mathrm{M}]$ avec $m = \deg \pi_{\mathrm{M}}$.
3. Notant $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, considérer $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ des plages d'indices d'une matrice extraite de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2} \mathrm{d}f(\mathrm{A})$ bien choisie avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_{\mathrm{A}} = n$.