ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°67

## Exercice 1 (*)

Résoudre sur $\mathrm{I} = \left]\,1\,;+\infty\,\right[$ l'équation différentielle

$$(1-t^3)x' + 3t^2x + x^2 = 0 \qquad \text{(E)}$$

On cherchera les solutions de (E) qui ne s'annulent pas.

**Corrigé :** Notons S l'ensemble des solutions de (E) qui ne s'annulent pas sur I. Soit $x \in \mathrm{S}$. Posant $x = \dfrac{1}{y}$, on a $y$ dérivable sur I et $x' = -\dfrac{y'}{y^2}$ puis

$$\begin{aligned}(1-t^3)x' + 3t^2x + x^2 = 0 &\iff -(1-t^3)\frac{y'}{y^2} + 3t^2\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 0\\ &\iff (1-t^3)y' - 3t^2y + 1 = 0\end{aligned}$$

Après résolution, on obtient

$$x \in \mathrm{S} \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall t \in \mathrm{I} \qquad y(t) = \frac{t+\alpha}{1-t^3}$$

Comme $y$ ne s'annule pas, il faut $\alpha \geqslant -1$ et la réciproque est immédiate. On conclut

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{t \mapsto \frac{1-t^3}{t+\alpha}, \alpha \in \left[\,-1\,;+\infty\,\right[\right\}}$$

**Remarque :** Il s'agit d'une *équation de Bernoulli.*

## Exercice 2 (*)

Soient $u$, $v$ dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe $\lambda$ réel tel que $u$ et $v$ soient solutions respectives de

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

2. Déterminer, en fonction de $\lambda$, la forme des fonctions $u$ et $v$.

**Corrigé :** 1. Comme $v \neq 0$, il existe $y_0$ réel tel que $v(y_0) \neq 0$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$$

Puis, comme $u \neq 0$, il existe $x_0$ réel tel que $u(x_0) \neq 0$ et par suite

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad v''(x) + \mu v(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{u''(x_0)}{u(x_0)}$$

Enfin, en évaluant la relation initiale en $(x_0, y_0)$, on obtient

$$\lambda + \mu = 0$$

On conclut $$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad | \quad u'' + \lambda u = 0 \quad \text{et} \quad v'' - \lambda v = 0}$$

2. Il existe $a, b, c, d$ réels tels que

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si $\lambda = 0$ | $\forall t \in \mathbb{R}$ | $u(t) = a + bt$ | $v(t) = c + dt$ |
| Si $\lambda > 0$ | $\forall t \in \mathbb{R}$ | $u(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$ | $v(t) = c\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t} + d\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}$ |
| Si $\lambda < 0$ | $\forall t \in \mathbb{R}$ | $u(t) = a\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}t} + b\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}t}$ | $v(t) = c\cos(\sqrt{-\lambda}t) + d\sin(\sqrt{-\lambda}t)$ |

# Exercice 3 (*)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

**Corrigé :** Soit $f$ une solution. D'après le théorème fondamental d'analyse, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par dérivation, elle vérifie l'équation différentielle $y' = xy$ d'où $f \in \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)$ et comme $f(0) = 1$, la fonction $f$ est déterminée de manière unique. On vérifie sans difficulté que la fonction $f$ obtenue est solution et on conclut

$$\boxed{\text{L'unique solution du problème est la fonction } x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.}$$

# Exercice 4 (**)

Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' + y = \tan(t) \tag{L}$$

**Corrigé :** Notons $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Le couple $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de solutions. On procède ensuite par variation des constante. Une solution de (L) est donnée par $x = \lambda\cos + \mu\sin$ avec $\lambda, \mu : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivables, solutions pour tout $t \in \mathrm{I}$ de

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos(t) + \mu'(t)\sin(t) = 0 \\ -\lambda'(t)\sin(t) + \mu'(t)\cos(t) = \tan(t) \end{cases} \iff \mathrm{R}(-t)\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda'(t) = -\dfrac{\sin^2 t}{\cos(t)} \\ \mu'(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Par suite, pour $t \in \mathrm{I}$

$$\lambda(t) = \alpha - \int^t \left(\frac{1}{\cos(u)} - \cos(u)\right)\mathrm{d}u = \alpha + \sin(t) - \int^t \frac{\cos(u)}{1 - \sin(u)^2}\mathrm{d}u = \alpha + \sin(t) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)}\right|$$

et

$$\mu(t) = \beta - \cos(t)$$

avec $\alpha$, $\beta$ réels. Les solutions de (L) sont décrites par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{t \mapsto \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\ln\left|\frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)}\right|\right\}}$$

## Exercice 5 (*)

Résoudre sur $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle

$$t^2x'' + 4tx' + 2x = \ln(t)$$

avec le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$.

**Corrigé :** Notons (L) l'équation différentielle linéaire. On pose $y(u) = x(\mathrm{e}^u)$. Par dérivation, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = x(\mathrm{e}^u) \qquad y'(u) = \mathrm{e}^u x'(\mathrm{e}^u) \qquad y''(u) = \mathrm{e}^{2u}x''(\mathrm{e}^u) + \mathrm{e}^u x'(\mathrm{e}^u)$$

d'où
$$x \in \mathrm{S_L} \iff y'' + 3y' + 2y = u$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = \alpha\mathrm{e}^{-u} + \beta\mathrm{e}^{-2u} + \frac{u}{2} - \frac{3}{4}$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{3}{4}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

## Exercice 6 (**)

Former le développement en série entière de $x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(x))$.

**Corrigé :** On pose
$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[ \qquad f(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(x))$$

On a $f \in \mathscr{C}^2(]-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[ \qquad f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{Arcsin}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

et
$$f''(x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(x))}{1-x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}\operatorname{ch}(\operatorname{Arcsin}(x))$$

Ainsi, la fonction $f$ est solution sur $]-1\,;1\,[$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-t^2)x'' - tx' - x = 0 & \text{(H)} \\ (x(0), x'(0)) = (0,1) & \text{(CI)} \end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière à ce problème de Cauchy. On pose $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in \,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Par dérivation de séries entières, on trouve

$$(1-t^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

d'où
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

après distribution des produits, changement d'indice et complétion des sommes pour démarrer à $n = 0$. Par linéarité du symbole somme car convergence, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n\right]t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n = 0$$

Les conditions initiales donnent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Par récurrence immédiate, on en déduit $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout $n$ entier. Avec un produit téléscopique, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n+1} = a_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \left( \frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)2k} \right) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} ((2k-1)^2+1)}{(2n+1)!}$$

Pour $r > 0$, on pose $u_n = a_{2n+1} r^{2n+1}$ pour $n$ entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)2n} r^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} r^2$$

D'après le critère de d'Alembert, si $r^2 > 1$ ce qui équivaut à $r > 1$, la série diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$. Si $r^2 < 1$ ce qui équivaut à $r < 1$, la série converge absolument d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$. Ainsi, la solution développable en série entière est bien définie sur $]-1\,;1\,[$. D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;1\,[ \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} ((2k-1)^2+1)}{(2n+1)!}}$$

## Exercice 7 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x \tag{E}$$

**Corrigé :** Soit $f$ solution de (E). On a $f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^x$ pour $x$ réel d'où $f'$ dérivable. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) - f'(-x) = \mathrm{e}^x$$

En substituant $x$ par $-x$ dans la relation de départ, on a $f'(-x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ pour $x$ réel d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(x) = 2\,\mathrm{ch}\,(x)$$

Ainsi, il existe $\alpha$, $\beta$ réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{ch}\,(x) + \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$$

Réciproquement, on injecte dans l'équation (E) et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\alpha+\beta)(\cos(x) - \sin(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta = 0$$

Finalement $\boxed{\mathrm{S_E} = \{x \mapsto \mathrm{ch}\,(x) + \alpha(\cos(x) - \sin(x)),\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$

**Remarque :** La forme de $\mathrm{S_E}$ était en partie prévisible. En effet, il s'agit de résoudre une équation du type $\Phi(f) = \exp$ avec $\Phi : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(-x))$ et on peut établir, en suivant la même trame que dans la résolution ci-avant, que le noyau $\mathrm{Ker}\ \Phi$ est une droite vectorielle.

## Exercice 8 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' + f \geqslant 0$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

**Corrigé :** Considérons l'équation $y'' + y = g$. On trouve après variation de la constante

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \alpha \sin(t) + \beta \cos(t) + \int_0^t g(s) \left[\sin(t)\cos(s) - \cos(t)\sin(s)\right] \, \mathrm{d}s$$
$$= \alpha \sin(t) + \beta \cos(t) + \int_0^t g(s) \sin(t-s) \, \mathrm{d}s$$

avec $\alpha$, $\beta$ réels. Puis

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) + y(t+\pi) = \int_0^t g(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{t+\pi} g(s)\sin(t-s+\pi)\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^t g(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{t+\pi} g(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s$$
$$y(t) + y(t+\pi) = \int_t^{t+\pi} \underbrace{g(s)\sin(s-t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}s$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0}$

## Exercice 9 (**)

Chercher les solutions développables en série entière des équations homogènes associées puis résoudre complètement les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $(1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
2. $4tx'' + 2x' - x = 0$ sur $\mathrm{I} = \left]0\,;+\infty\right[$

**Corrigé :** 1. On note (H) l'équation différentielle homogène et (L) l'équation avec second membre. Cherchons des solutions de (H) développables en série entière. On pose $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ avec $\mathrm{R} > 0$. Par dérivation de séries entières, on trouve

$$(1+t^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 4t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

d'où $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n = 0$$

Après changement d'indice et démarrage des sommes à $n = 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n = 0$$

Et par linéarité car convergence, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, il s'ensuit $a_{n+2} + a_n = 0$ pour tout $n$ entier. On en déduit que les suites $(a_{2n})_n$ et $(a_{2n+1})_n$ sont géométriques de raison $-1$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n} = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = (-1)^n a_1$$

Les séries $\sum (-1)^n t^{2n}$ et $\sum (-1)^n t^{2n+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1 et par suite

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[ \qquad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n + a_1 t \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2}$$

Notons $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{t}{1+t^2}$$

On vérifie sans difficulté que $(\varphi, \psi)$ est une famille libre de solutions de (H) sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Pour une équation résolue linéaire d'ordre deux, on sait que $\mathrm{S_H}$ est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ donc

$$\boxed{\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(\varphi, \psi)}$$

On procède ensuite par variation des constantes. Soient $\lambda, \mu : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivables. En considérant l'équation sous forme résolue, on cherche $\lambda, \mu$ solutions de

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi + \mu'(t)\psi(t) = 0 \\ \lambda'(t)\varphi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda'(t) = -\dfrac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$$

On conclut $\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{ t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2} \left[ t\,\mathrm{Arctan}\,(t) - \dfrac{\ln(1+t^2)}{2} + \alpha t + \beta \right],\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

**Remarque :** Il s'agit d'une situation assez favorable : en cherchant des solutions de (H) développables en séries entières, on a trouvé un système fondamental, autrement dit toutes les solutions de (H).

2. Supposons qu'il existe une solution de (H) développable en série entière $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$ sur $\mathrm{I} = \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ avec $\mathrm{R} > 0$. Par dérivation d'une série entière, il vient

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n, \qquad x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\, t^{n-1}, \qquad x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

On injecte ces expressions dans (H) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4n(n-1) a_n\, t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n\, t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = 0$$

la première somme étant commencée pour $n = 1$ (le terme est nul pour $n = 1$). Dans la dernière somme, on procède au changement d'indice $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, t^{n-1}$. Il vient par linéarité du symoble $\Sigma$ car convergence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[4n(n-1) + 2n a_n - a_{n-1}\right] t^{n-1} = 0$$

Par unicité du développement en série entière, il s'ensuit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 4n(n-1) + 2n a_n - a_{n-1} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

Si $a_0 \neq 0$, une récurrence immédiate donne $a_n \neq 0$ pour tout $n$ entier. En écrivant un produit téléscopique, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = a_0 \prod_{k=1}^{n} \left( \frac{a_k}{a_{k-1}} \right) = \frac{a_0}{\prod\limits_{k=1}^{n} 2k(2k-1)} = \frac{a_0}{(2n)!}$$

Posons $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{(2n)!}$. Pour $r > 0$, notant $u_n = \dfrac{r^n}{(2n)!}$, il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit la convergence absolue de la série entière $\sum u_n$ d'où $(u_n)_n$ de limite nulle et donc bornée, et ce pour tout $r \geqslant 0$. On en déduit $\mathrm{R} = +\infty$.

Pour $t \geqslant 0$, on a $$\varphi(t) = \varphi\left(\left(\sqrt{t}\right)^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{t}\right)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)$$

Pour $t \leqslant 0$, on a $$\varphi(t) = \varphi\left(-\left(\sqrt{-t}\right)^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{-t}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-t}\right)$$

En conclusion

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions développables en série entière de (H) est la droite vectorielle } \operatorname{Vect}(\varphi) \text{ avec } \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ \cos\left(\sqrt{-t}\right) & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Plaçons-nous sur $\mathrm{I} = ]\,0\,;+\infty\,[$. On pose $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, t \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{t})$. Si $\psi$ est solution de (H), considérant le wronskien de $(\varphi, \psi)$, on a

$$\varphi\psi' - \varphi'\psi = \mathrm{W} \tag{L}$$

On sait que le wronskien vérifie l'équation différentielle $\mathrm{W}' = -\dfrac{1}{2t}\mathrm{W}$ autrement dit

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On peut désormais considérer l'équation (L) comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. La droite $\operatorname{Vect}(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et par variation de la constante, avec $\lambda$ dérivable sur I et $\psi = \lambda\varphi$, il vient pour $t \in \mathrm{I}$

$$\varphi^2(t)\lambda'(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda(t) = \int \frac{\alpha}{\sqrt{t}\operatorname{ch}^2(\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t + \beta = 2\alpha \operatorname{th}(\sqrt{t}) + \beta$$

avec $\alpha$, $\beta$ réels. Notant $\lambda = 2\alpha$, on conclut

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t > 0 \qquad x(t) = \lambda \operatorname{sh}(\sqrt{t}) + \mu \operatorname{ch}(\sqrt{t})$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S_H} = \left\{t \mapsto \lambda \operatorname{sh}(\sqrt{t}) + \mu \operatorname{ch}(\sqrt{t}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

**Remarque :** On a toutes les solutions puisqu'on a obtenu un plan vectoriel de solutions et que sur I, l'équation différentielle peut s'écrire sous forme résolue. On remarque par ailleurs que la nouvelle solution obtenue « ressemble » à la première. Enfin, on peut aussi mettre en œuvre la méthode de Lagrange mais celle-ci demande un peu plus d'effort.

## Exercice 10 (**)

Soit $y$ solution de $y'' + a(t)y = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, ]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que $y$ s'annule au moins une fois.

**Corrigé :** Supposons que $y$ ne s'annule pas. Comme $y$ est continue, elle est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons par exemple $y > 0$. On aurait alors $y'' < 0$ d'où $y$ concave. Le graphe de $y$ est situé sous ses tangentes. Or, comme $y$ n'est pas constante, son graphe admet des tangentes non horizontales et il s'ensuit que que $y$ prend nécessairement des valeurs négatives ce qui est impossible par hypothèse. En effet, considérons $\alpha$ réel tel que $y'(\alpha) \neq 0$, par exemple $y'(\alpha) > 0$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) \leqslant y'(\alpha)(t - \alpha) + y(\alpha)$$

et faisant tendre $t \to -\infty$, on constate que $y$ prend des valeurs négatives. On procède de même si $y'(\alpha) < 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution } y \text{ s'annule au moins une fois.}}$$

## Exercice 11 (**)

On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

où $q$ est une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Soit $y$ une solution bornée de (H). Étudier le comportement de $y'$ en $+\infty$.
2. Montrer que (H) admet des solutions non bornées.

**Corrigé :** 1. On a $y'' = \mathrm{O}(q)$ d'où $y''$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme $y'(t) = y'(0) + \displaystyle\int_0^t y''(s)\,\mathrm{d}s$ pour $t \geqslant 0$, on en déduit que $y'(t)$ admet une limite finie $\ell$ pour $t \to +\infty$. Supposons $\ell \neq 0$ par exemple $\ell > 0$. On dispose de $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant \mathrm{A} \qquad y'(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$$

Par suite $\quad \forall t \geqslant \mathrm{A} \qquad y(t) = y(\mathrm{A}) + \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^t y'(s)\,\mathrm{d}s \geqslant y(\mathrm{A}) + \frac{\ell}{2}(t-\mathrm{A}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

ce qui contredit le caractère borné de $y$. Si $\ell < 0$, on se ramène à la configuration précédente en considérant $-y$. On a donc établi

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est une solution bornée de (H), alors } y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.}$$

2. Soit $(u, v)$ une base de solutions bornées de (H) sur $\mathbb{R}_+$ et notons $\mathrm{W} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ le wronskien de ces solutions. Le wronskien est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\mathrm{W}' = 0 \times \mathrm{W} = 0$$

Par suite, le wronskien est constant sur $\mathbb{R}_+$. Or, d'après le résultat de la première question, les fonctions $u'$ et $v'$ sont de limite nulle en $+\infty$ d'où

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathrm{W}(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = \mathrm{O}(1)v'(t) + \mathrm{O}(1)u'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Le wronskien étant constant, cela signifierait qu'il est identiquement nul ce qui est absurde puisque le wronskien d'un système fondamental de solutions ne s'annule pas. Ainsi

$$\boxed{\text{L'équation (H) admet des solutions non bornées.}}$$