Feuille d'exercices n°68

Exercice 1 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et un complexe α avec $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ tel que

$$f'(x) + \alpha f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Montrer
$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Corrigé : Par variation de la constante, on a pour t_0 réel

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\mathrm{e}^{\alpha t_0} f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\alpha s} g(s)\,\mathrm{d}s\right]$$

avec $g = f' + \alpha f$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver t_0 réel tel que

$$\forall s \geqslant t_0 \qquad |g(s)| \leqslant \varepsilon$$

Il s'ensuit

$$\forall t \geqslant t_0 \qquad |f(t)| \leqslant |\mathrm{e}^{\alpha t_0} f(t_0)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)t}\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}\,(\alpha)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\alpha)s}\right]_{t_0}^{t} \leqslant \mathrm{o}(1) + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}\,(\alpha)}$$

Ainsi
$$\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$$

Variante : On choisit $t_0 = 0$. On a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u} g(t-u)\mathbb{1}_{[0\,;t]}(u)\,\mathrm{d}u$$

et on conclut par convergence dominée.

Exercice 2 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$tf'(t) - 2f(-t) = t \tag{E}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, utiliser le changement de variables $t = \mathrm{e}^u$ puis déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Corrigé : Soit $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{E}}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad f'(t) = \frac{2f(-t) + t}{t}$$

Il s'ensuit que f' est dérivable sur $\mathrm{I} = \left]\,0\,;+\infty\,\right[$ ou $\left]\,0\,;+\infty\,\right[$ et par conséquent f est deux fois dérivable sur I. Par dérivation puis multiplication par t, il vient

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad t^2 f''(t) + tf'(t) + t2f'(-t) = t$$

En substituant t par $-t$ dans la relation de départ, on obtient

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad -tf'(-t) - 2f(t) = -t \iff tf'(-t) = t - 2f(t)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall t \in \mathrm{I} \qquad t^2 f''(t) + tf'(t) - 4f(t) = -t} \tag{L}$$

Supposons $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. On pose $y(u) = f(\mathrm{e}^u)$ pour u réel. Par dérivation, on trouve

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = f(\mathrm{e}^u) \qquad y'(u) = \mathrm{e}^u f'(\mathrm{e}^u) \qquad y''(u) = \mathrm{e}^{2u} f''(\mathrm{e}^u) + \mathrm{e}^u f'(\mathrm{e}^u)$$

Ainsi
$$\begin{aligned} f \in \mathrm{S_L} &\iff y''(u) - 4y(u) = -\mathrm{e}^u \\ &\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad y(u) = \alpha \mathrm{e}^{2u} + \beta \mathrm{e}^{-2u} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^u \end{aligned}$$

D'où
$$\forall t > 0 \qquad f(t) = \alpha t^2 + \frac{\beta}{t^2} + \frac{1}{3}t \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Avec le changement $t = -\mathrm{e}^u$ pour u réel (ou en substituant t par $-t$ dans (L)), on trouve la même forme de solutions sur $\mathrm{I} =]\,-\infty\,;0\,[$. Il s'agit d'une condition nécessaire pour avoir $f \in \mathrm{S_E}$. Réciproquement, on suppose f de la forme précédemment obtenue. Il vient

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad tf'(t) - 2f(-t) = 2\alpha t^2 - \frac{2\beta}{t^2} + \frac{1}{3}t - 2\alpha t^2 - \frac{2\beta}{t^2} + \frac{2}{3}t = -\frac{4\beta}{t^2} + t$$

Ainsi
$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad tf'(t) - 2f(-t) = t \iff \forall t \in \mathrm{I} \qquad -\frac{4\beta}{t^2} + t = t \iff \beta = 0$$

Par conséquent
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \alpha t^2 + \frac{1}{3}t$$

On a résolu l'équation (E) sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $]\,-\infty\,;0\,[$. Il reste à examiner si une fonction f solution sur chacun des intervalles précédemment mentionnés est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. On a clairement $f(0) = 0$ puis on dispose de α, λ réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \alpha t^2 + \dfrac{2}{3}t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \lambda t^2 + \dfrac{2}{3}t & \text{si} t < 0 \end{cases}$$

On a $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Enfin, en dérivant à droite et à gauche de 0, on constate que

$$\forall t > 0 \qquad f'(t) = 2\alpha t + \frac{1}{3} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \forall t < 0 \qquad f'(t) = 2\lambda + \frac{1}{3} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{3}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, il s'ensuit que f est bien dérivable en 0. On conclut

$$\boxed{f \in \mathrm{S_E} \iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \alpha t^2 + \dfrac{1}{3}t & \text{si } t \geqslant 0 \\ \lambda t^2 + \dfrac{1}{3}t & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}}$$

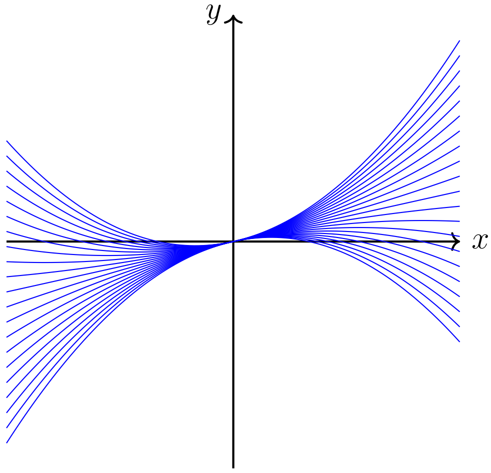

FIGURE 1 – Tracé de courbes solutions

Exercice 3 (**)

1. Soit n entier. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

2. Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Corrigé : 1. Notons (L) l'équation différentielle linéaire considérée et (H) son équation homogène associée. La famille $(\cos, \sin)$ forme un système fondamental de solutions de (H). Pour déterminer une solution particulière, considérons l'équation différentielle

$$z'' + z = \mathrm{e}^{\,int}$$

Si $n \neq 1$, on cherche une solution de la forme $z(t) = \alpha \mathrm{e}^{\,int}$ pour t réel avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On injecte et on trouve

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \smallsetminus \{1\} \times \mathbb{R} \qquad \alpha(1 - n^2)\mathrm{e}^{\,int} = \mathrm{e}^{\,int}$$

soit
$$\forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{1\} \qquad \alpha = \frac{1}{1 - n^2}$$

Passant à la partie réelle, on en déduit qu'une solution particulière de (L) pour $n \neq 1$ est donnée par

$$t \mapsto \frac{\cos(nt)}{1 - n^2}$$

Si $n = 1$, il y a résonance et on cherche une solution de la forme $z(t) = \alpha t \mathrm{e}^{\,it}$ pour t réel avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On injecte et on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 2\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{\,it} = \mathrm{e}^{\,it}$$

soit $\alpha = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$. Passant à la partie réelle, une solution particulière de (L) pour $n = 1$ est donnée par

$$t \mapsto \frac{t \sin(t)}{2}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont de la forme } t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \begin{cases} \dfrac{\cos(nt)}{1-n^2} & \text{si } n \neq 1 \\ \dfrac{t\sin(t)}{2} & \text{si } n = 1 \end{cases} \text{ avec } \lambda,\ \mu \text{ réels.}}$$

2. Si le second membre de l'équation était une somme finie $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\cos(nt)$, on appliquerait simplement le principe de superposition. On va suivre cette idée en considérant la somme infinie candidate pour être une solution particulière. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad u_n(t) = \begin{cases} a_n\dfrac{\cos(nt)}{1-n^2} & \text{si } n \neq 1 \\ a_1\dfrac{t\sin(t)}{2} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Pour n entier, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad u_n'(t) = a_n\frac{n}{n^2-1}\sin(nt) \quad \text{et} \quad u_n''(t) = a_n\frac{n^2}{n^2-1}\cos(nt)$$

On observe $\quad \forall n \geqslant 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad u_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(a_n) \quad \text{et} \quad u_n'(t) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(a_n)$

et
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \|u_n''\|_\infty = \frac{n^2}{n^2-1}\,|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(a_n)$$

Ainsi, les séries de fonctions $\sum u_n$, $\sum u_n'$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ et $\sum u_n''$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ (on est contraint à se limiter à des segments à cause du terme u_1). Il en résulte que la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n''(t)$$

puis
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)''(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[u_n'' + u_n\right](t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos(nt)$$

On conclut $\boxed{\text{Les solutions sont de la forme } t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t).}$

Exercice 4 (***)

Soient p, q dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec I intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{H}$$

1. Montrer qu'une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.
2. Soit (f,g) une base de solutions de (H) et $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f. Montrer que g admet un un unique zéro dans $]\,\alpha\,;\beta\,[$.

Corrigé : 1. Soit y solution non nulle de (H) et $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments deux à deux distincts de $[\,a\,;b\,]$ qui soient des zéros de y. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,a\,;b\,]$. Par continuité, on a

$$0 = y(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\alpha) = 0$$

Quitte à ré-extraire, on suppose $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour n entier. Par dérivabilité en α, il vient

$$0 = \frac{y(\alpha_{\varphi(n)}) - y(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} y'(\alpha)$$

La fonction y est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction nulle en est solution, il s'ensuit que y est nulle d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, ce qui est contradictoire. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution non nulle de (H) admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I.}}$$

2. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f. Notons $\mathrm{W}(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$ pour $t \in \mathrm{I}$ le wronskien du système (f, g). Comme il s'agit d'un système fondamental de solutions, on sait que le wronskien ne s'annule pas sur I. Supposons que g ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. Le wronskien ne s'annule pas en particulier en α et β ce qui prouve que g ne s'annule pas sur le segment $\mathrm{J} = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Considérons la fonction φ définie sur J par $\varphi = f/g$. Par dérivation, on trouve $\varphi' = -\mathrm{W}/g^2$ et comme $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$, le théorème de Rolle garantit l'annulation de φ' et donc de W sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ ce qui est exclu.
Par conséquent, la fonction g s'annule sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. En supposant que celle-ci admet au moins deux zéros sur cet intervalle, on pourrait alors établir par le même raisonnement que ci-avant que la fonction f s'annule entre les zéros de g ce qui contredirait le caractère consécutif de α et β. Ainsi

$$\boxed{\text{Entre deux zéros consécutifs de } f \text{ existe un unique zéro de } g.}$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *théorème d'entrelacement de Sturm.*

Variantes : On peut éviter d'introduire la fonction auxiliaire φ. La fonction f est continue et ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ donc est de signe constant sur cet intervalle et de même pour la fonction g par hypothèse. Supposons par exemple $f(t) > 0$ pour $t \in\,]\,\alpha\,;\beta\,[$. Faisant tendre $t \to \alpha$ et $t \to \beta$ dans les inégalités

$$\forall t \in\,]\,\alpha\,;\beta\,[\qquad \frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta} \leqslant 0$$

Il vient $$f'(\alpha) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(\beta) \leqslant 0$$

Si $f'(\alpha) = 0$, alors f est solution du problème de Cauchy formée de (H) et de $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$ dont la fonction nulle est solution. D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on aurait f nulle ce qui contredirait que (f, g) est une système fondamental de solutions de (H). On en déduit $f'(\alpha) > 0$ et de même $f'(\beta) < 0$. On observe

$$\mathrm{W}(\alpha)\mathrm{W}(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta)g(\alpha)g(\beta) \leqslant 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue W, celle-ci s'annule sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$ ce qui est exclu. On en déduit que g s'annule sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$.

Exercice 5 (***)

Soient f, g continues sur $\mathbb{R}_+$ avec g positive et vérifiant

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \geqslant 0$$

Montrer
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Corrigé : Soit $\mathrm{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{A} + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Comme fg est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a U de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{U}'(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Multipliant l'inégalité d'origine par $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, il vient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}'(x) \leqslant g(x)\mathrm{U}(x) \iff h(x) \leqslant 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{U}' - g(x)\mathrm{U} = h$$

La fonction h vérifie une inégalité simple. La stratégie consiste alors à expliciter U en fonction de h afin d'exploiter au mieux cette inégalité. Par variation de la constante, notant $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{G}(x)}\left[\mathrm{A} + \int_0^x h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{G}(t)}\,\mathrm{d}t\right]$$

Par conséquent
$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}(x) \leqslant \mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{G}(x)}$$

On conclut
$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule *lemme de Gronwall*.

Exercice 6 (***)

Soit z solution de $z'' - a(t)z = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},]\,0\,;+\infty\,[)$. Montrer que $z = 0$ ou bien que z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit z une solution non nulle et soit α une racine de z. On a $z'(\alpha) \neq 0$ sans quoi la solution serait nulle, par unicité du théorème de Cauchy linéaire. On suppose $z'(\alpha) > 0$. Ainsi, la fonction z croît strictement sur un voisinage de α et par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z(t) > 0$ pour tout $\in\,]\,\alpha\,;\alpha+\varepsilon\,[$. Supposons que z admette une racine sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$. D'après ce qui précède, celle-ci sera dans $[\,\alpha+\varepsilon\,;+\infty\,[$. Ainsi, on peut choisir

$$\beta = \operatorname{Inf}\ \{t \in\,]\,\alpha\,;+\infty\,[\ \mid z(t) = 0\}$$

qui est bien défini comme borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide, minorée et qui vérifie $\alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant \beta$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure et continuité de z, on a $z(\beta) = 0$. Par choix de β, la fonction z ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ et prend donc des valeurs strictement positives (théorème des valeurs intermédiaires). On en déduit que $z'' = a(t)z$ prend des valeurs positives ce qui prouve la convexité de z sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$. Ainsi, le graphe de z est situé sous sa corde entre α et β ce qui impose $z(t) \leqslant 0$ pour $t \in\,]\,\alpha\,;\beta\,[$, ce qui est faux. On en déduit que z n'admet d'autre racines sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$. Le raisonnement est identique sur $]\,-\infty\,;\alpha\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{Une solution non nulle s'annule au plus une fois.}}$$

Variante : On peut astucieusement considérer z^2. On a

$$(z^2)'' = 2(z'^2 + zz'') = 2(z'^2 + a(t)z^2) \geqslant 0$$

d'où la convexité de z^2. Si z admet deux racines $\alpha < \beta$, z^2 également et par convexité, on a $z^2(t) \leqslant 0$ pour $t \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ d'où $z(t) = 0$ pour $t \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ et par conséquent $z'(\alpha) = 0$ et $z(\alpha) = 0$ ce qui entraine z nulle.

Exercice 7 (***)

Soient $f, g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continues avec f positive. On s'intéresse au *problème aux limites* (P) :

$$\begin{cases} y'' = f(t)y + g(t) & \text{(L)} \\ y(a) = y(b) = 0 & \text{(B)} \end{cases}$$

1. Soit $y \in \mathrm{S_H}$ avec (H) homogène associée à (L). Montrer que y^2 est convexe.
2. On pose
$$\Phi\colon \begin{cases} \mathrm{S_H} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \;y \;\longmapsto (y(a), y(b)) \end{cases}$$
Montrer que Φ est un isomorphisme.
3. Conclure que le problème aux limites (P) admet une unique solution.

Corrigé : 1. Soit $y \in \mathrm{S_H}$. Par dérivation, on trouve

$$(y^2)'' = 2(y'^2 + yy'') = 2(y'^2 + fy^2) \geqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } y^2 \text{ est convexe.}}$

2. L'application Φ est clairement linéaire. Soit $y \in \operatorname{Ker} \Phi$. D'après le résultat de la question précédente, on a y^2 convexe avec $y^2(a) = y^2(b) = 0$. Par convexité, le graphe de y^2 est situé sous sa corde entre a et b ce qui signifie $y^2(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\,a\,;b\,]$. Ainsi, l'application linéaire Φ est injective du plan vectoriel $\mathrm{S_H}$ vers $\mathbb{R}^2$, deux espaces de même dimension finie. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un automorphisme.}}$$

Variante : On peut aussi raisonner sur $\displaystyle\int_a^b f(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t$ puisque en intégrant par partie

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b y''(t)y(t)\,\mathrm{d}t = [y'(t)y(t)]_a^b - \int_a^b \frac{y'(t)^2}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Par séparation de l'intégrale, on en déduit la nullité de y' et on retrouve le résultat précédent.

3. On sait, quitte à choisir des conditions initiales et invoquer le théorème de Cauchy linéaire, que l'ensemble $\mathrm{S_L}$ est non vide. Soit $u \in \mathrm{S_L}$. On choisit $v \in \mathrm{S_H}$ tel que $\Phi(v) = (u(a), u(b))$, choix possible puisque Φ est un automorphisme. Alors, on vérifie sans difficulté que $u - v$ est solution du problème aux limites (P). Puis, si on considère y et z solutions de (P). Alors, on a $y - z \in \operatorname{Ker} \Phi$ d'où l'unicité. On conclut

$$\boxed{\text{Le problème aux limites (P) admet une unique solution.}}$$

Remarque : On peut facilement généraliser cette situation en considérant le problème

$$\begin{cases} y'' = f(t)y + g(t) & \text{(L)} \\ y(a) = \alpha,\;\; y(b) = \beta & \text{(B)} \end{cases}$$

avec α, β réels. Il suffit de considérer $v \in \mathrm{S_H}$ tel que $\Phi(v) = (u(a) - \alpha, u(b) - \beta)$ dans ce qui précède.

Exercice 8 (***)

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec un second membre g à préciser.
2. En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\cos(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$

Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^k$ sous l'intégrale pour tout k entier.

• Pour x réel, on a $t \mapsto g(x,t)$ continue et intégrable sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

• Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $x \mapsto g(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^k$ d'après les théorèmes généraux.

Par dérivation, on trouve

$$\forall j \in [\![\,0\,;\,k\,]\!] \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad \frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x,t) = \frac{(-t)^j \mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

• Pour k entier et x réel, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ continue (par morceaux) sur $[\,0\,;1\,]$.

• **Domination :** On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad \left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant 1$$

Ainsi, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^k$ et ceci vaut pour tout k entier ce qui prouve que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k \int_0^1 \frac{t^k \mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(x) = \int_0^1 \frac{(1+t^2)\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\qquad \boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f'' + f = \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$

2. On a $\qquad f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad f'(0) = -\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\frac{\ln 2}{2}$

On peut déterminer une autre expression de f comme solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'' + f = \varphi \\ f(0) = \dfrac{\pi}{4}, f'(0) = -\dfrac{\ln 2}{2} \end{cases}$$

Pour l'équation homogène associée, on trouve $f = \lambda\cos + \mu\sin$ puis, par variation des constantes, on cherche λ, μ dérivables solutions de

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda(t) = \alpha - \int_0^t \varphi(s)\sin(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \mu(t) = \beta + \int_0^t \varphi(s)\cos(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Avec les égalités $\qquad f = \lambda\cos + \mu\sin \qquad f' = -\lambda\sin + \mu\cos$

du fait des conditions de la variation des constantes, on obtient

$$f(0) = \alpha \quad \text{et} \quad f'(0) = \beta$$

Ainsi $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \left(\dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\int_0^t \varphi(s)\sin(s)\,\mathrm{d}s\right)\cos(t) + \left(\beta + \displaystyle\int_0^t \varphi(s)\cos(s)\,\mathrm{d}s\right)\sin(t)$

Par ailleurs, on peut expliciter λ et μ en fonction de f et f' puisque

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

Enfin, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \varphi(x) \qquad |f'(x)| \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par suite $\qquad \lambda(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mu(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

On en déduit donc la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(s)\sin(s)\,\mathrm{d}s$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(s)\cos(s)\,\mathrm{d}s$ et on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 9 (***)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction T-périodique avec $\mathrm{T} > 0$. On considère l'équation

$$y' + \alpha y = b(x) \tag{L}$$

1. Montrer que si f est solution de (L), alors $f_{\mathrm{T}} : x \mapsto f(x + \mathrm{T})$ est aussi solution de (L).
2. En déduire que f solution de (L) est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(\mathrm{T})$.
3. Montrer que, sauf pour certaines valeurs de α, l'équation (L) admet une unique solution T-périodique.

Corrigé : 1. Soit $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{L}}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + \alpha f(x) = b(x)$$

d'où $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x + \mathrm{T}) + \alpha f(x + \mathrm{T}) = b(x + \mathrm{T}) = b(x)$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{Si } f \text{ est solution de (L), alors } f_{\mathrm{T}} \text{ l'est également.}}$

2. Le sens direct est immédiat. Supposons $f(0) = f(\mathrm{T})$. Alors, la fonction $f - f_{\mathrm{T}}$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + \alpha y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

et comme la fonction nulle est solution, on en déduit la nullité de $f - f_{\mathrm{T}}$ d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire. Ainsi

$$\boxed{\text{Une solution } f \text{ de (L) est T-périodique si et seulement si } f(0) = f(\mathrm{T}).}$$

3. Soit $f \in \mathrm{S_L}$. Par variation de la constante, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(f(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t} b(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi, on obtient $\qquad f(0) = f(\mathrm{T}) \iff \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\alpha t} b(t)\,\mathrm{d}t = \left(\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{T}} - 1\right) f(0)$

Ainsi, si $\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{T}} \neq 1$, on peut déterminer $f(0)$ et donc l'unique solution au problème de Cauchy vérifiant (L) et $y(0) = f(0)$, solution qui sera T-périodique puisque la condition obtenue à la question précédente est satisfaite. En revanche, si $\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{T}} = 1$, la condition de T-périodicité porte uniquement sur α et b et si cette condition est remplie, toute solution de (L) sera T-périodique. Enfin, on a

$$\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{T}} = 1 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{T}\,\mathrm{Re}\,\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{T}\,\mathrm{Im}\,\alpha} = 1 \iff \mathrm{Re}\,\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}\,\mathrm{Im}\,\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$$

On conclut

$$\boxed{\text{Pour } \alpha \notin \frac{2\mathrm{i}\pi}{\mathrm{T}}\mathbb{Z}, \text{ l'équation (L) admet une unique solution T-périodique.}}$$