

Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 18 10/03/25 - 14/03/25

Programme :

Calcul différentiel :

- Application différentiable, développement limité à l'ordre 1, unicité du développement différentielle, lien dérivabilité/différentiabilité pour une fonction d'une variable réelle, différentiable implique continue, linéarité de la différentiation, différentielle de $B(f, g)$ avec B bilinéaire et f, g différentiables, généralisation pour $M(f_1, \dots, f_p)$ avec M p -linéaire et f_1, \dots, f_p différentiables, différentielle d'une composée, dérivée le long d'un arc ;
- Dérivée selon un vecteur, lien avec la différentielle si l'application est différentiable, dérivée partielle, lien avec la différentielle si l'application est différentiable, vecteur gradient, matrice jacobienne, opérations sur les dérivées partielles ou jacobiniennes : combinaison linéaire, application bilinéaire, composition (règle de la chaîne) ;
- Fonctions de classe \mathcal{C}^1 , caractérisation avec les dérivées partielles, intégration le long d'un chemin, vecteur tangent, espace tangent en un point du graphe d'une fonction de $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, espace tangent à une ligne de niveau ;
- Extremum, caractère local, global, point critique, condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert, optimisation sous contrainte.
- Fonctions de classe \mathcal{C}^k , opérations, théorème de Schwarz ;
- Matrice hessienne, théorème de Taylor-Young à l'ordre 2, condition nécessaire d'extremum local, condition suffisante d'extremum local strict, cas particulier dans \mathbb{R}^2 avec les conditions sur le déterminant et la trace de la matrice hessienne (notations de Monge).

Questions de cours : (avec preuve sauf la caractérisation \mathcal{C}^1)

1. Unicité du développement limité ;
2. Lien entre dérivée et différentielle pour une fonction d'une variable réelle ;
3. Différentielle d'une composée ;
4. Dérivée le long d'un arc ;
5. La différentiabilité en un point implique l'existence de dérivée en ce point selon tout vecteur ;
6. Expression de $df(a) \cdot h$ en fonction des dérivées partielles $\partial_i f(a)$;
7. Règle de la chaîne ;
8. Existence et expression du gradient ;
9. Caractérisation des fonctions de classe \mathcal{C}^1 (sans preuve) ;

10. Caractère non \mathcal{C}^1 de $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) ; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$;
11. Formule d'intégration le long d'un chemin ;
12. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs (preuve dans le cas convexe) ;
13. Espace tangent à une ligne de niveau (preuve partielle) ;
14. Théorème d'optimisation sous contrainte (avec les propositions 19 et 20) ;
15. Condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert.
16. Étude au deuxième ordre : condition nécessaire d'extremum local ;
17. Étude au deuxième ordre : condition suffisante d'extremum local strict et cas particulier dans \mathbb{R}^2 ;