ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°78

Exercice 1 (***)

On pose $\qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$.

Corrigé : On remarque

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x+\pi,y)=f(x,y) \quad \text{et} \quad f(x,y+\pi)=f(x,y)$$

ce qui permet donc de réduire le domaine d'étude à $[\,0\,;\pi\,]^2$. On remarque aussi

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(\pi-x,\pi-y)=-f(x,y)$$

ce qui permet de réduire le domaine d'étude à $\mathrm{A}=\left\{(x,y)\in[\,0\,;\pi\,]^2 \mid x+y\leqslant\pi\right\}$, le comportement sur $[\,0\,;\pi\,]^2\smallsetminus\mathrm{A}$ s'en déduisant. L'ensemble A est un compact (fermé borné en dimension finie). La fonction f est continue comme composée de telles fonctions et admet donc un maximum et un minimum sur A. On a clairement

$$\forall(x,y)\in\mathrm{A} \qquad f(x,y)\geqslant 0$$

puis $\qquad \forall(x,y)\in\partial\mathrm{A} \qquad f(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \forall(x,y)\in\mathring{\mathrm{A}} \qquad f(x,y)>0$

Tous les points de $\partial\mathrm{A}$ sont donc des minimums de f sur A. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de telles fonctions et elle atteint son maximum sur A sur l'ouvert $\mathring{\mathrm{A}}$ en un point critique. On a pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=(0,0) &\iff \begin{cases}\sin(y)\,[\cos(x)\sin(x+y)+\sin(x)\cos(x+y)]=0\\ \sin(x)\,[\cos(y)\sin(x+y)+\sin(y)\cos(x+y)]=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\sin(2x+y)=0\\ \sin(x+2y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y\equiv 0\ [\pi]\\ x+2y\equiv 0[\pi]\end{cases}\end{aligned}$$

On trouve $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ unique point critique de f dans $\mathring{\mathrm{A}}$. D'après ce qui précède, il s'agit donc du maximum de f sur A et d'après la réduction du domaine d'étude, on en déduit

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ admet un maximum global en les points } \left(\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{3}+\ell\pi\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}\\ \text{et un minimum global en les points } \left(\frac{2\pi}{3}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+\ell\pi\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}.\end{array}}$$

L'ensemble $\mathrm{B}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$ est un compact et la fonction continue f y admet un maximum et un minimum. Comme $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}$ et que la fonction f admet un maximum global sur A en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$, il s'agit donc également du maximum de f sur B et on a $f(x,y)\geqslant 0$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{B}$ avec

$$\forall t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad f(t,0)=f(0,t)=0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un maximum global sur B en } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ et un minimum global sur B en les points } (0, t) \text{ et } (t, 0) \text{ avec } t \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right].}$$

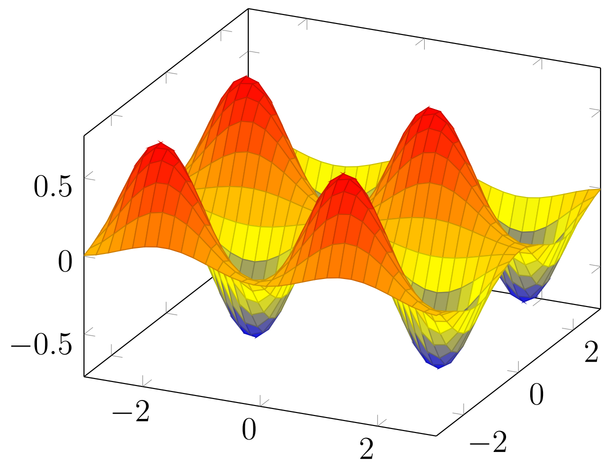

FIGURE 1 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 2 (****)

On pose $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0, 1)$.

Corrigé : On a $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en tant que fonction polynomiale. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les éventuels extremums de f sont points critiques. On obtient pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^3 - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$$

Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3$$

• En $(0, 0)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $-9 < 0$ ce qui prouve que le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum local.

• En $(1, 1)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $27 > 0$ et de trace égale à $12 > 0$ ce qui prouve que le point $(1, 1)$ est minimum local de f. Avec

$$f(x, 0) = x^3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

On conclut

$$\boxed{\text{Le point } (1, 1) \text{ est l'unique extremum de } f, \text{ minimum local non global.}}$$

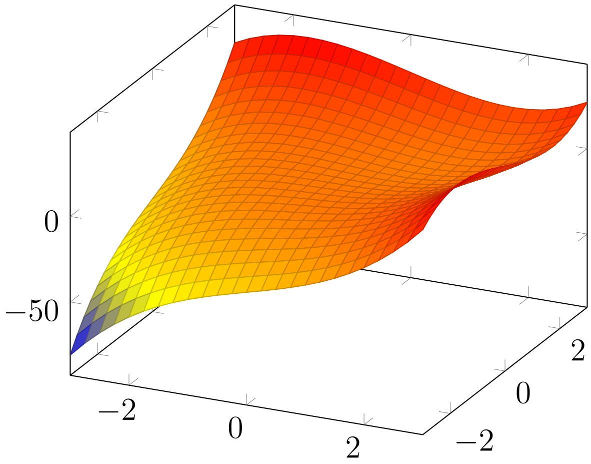

FIGURE 2 – Graphe de $z = f(x, y)$

La boule fermée $\mathrm{B}_f(0,1)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. Il s'agit donc d'un compact. La fonction f continue atteint ses bornes sur $\mathrm{B}_f(0,1)$. Celles-ci sont atteintes soit sur la frontière, soit à l'intérieur. L'intérieur de $\mathrm{B}_f(0,1)$ est l'ouvert $\mathrm{B}(0,1)$ et sur cet ouvert, tout extremum de f est point critique. Or, le seul point critique de f dans $\mathrm{B}(0,1)$ est $(0,0)$ et ce n'est pas un extremum. On en déduit que les bornes de f sur $\mathrm{B}_f(0,1)$ sont atteintes sur la frontière $\partial\mathrm{B}_f(0,1)$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \varphi(t) = f(\cos(t), \sin(t))$$

On a $$\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)} f(x,y) = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,0\,;2\pi\,]} \varphi(t) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)} f(x,y) = \operatorname*{Inf}_{t\in[\,0\,;2\pi\,]} \varphi(t)$$

Soit $t \in [\,0\,;2\pi\,]$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \cos(t)^3 + \sin(t)^3 - 3\sin(t)\cos(t)\\
&= (\cos(t)+\sin(t))(1-\cos(t)\sin(t)) - 3\sin(t)\cos(t)\\
\varphi(t) &= (\cos(t)+\sin(t))\left(1 - \frac{1}{2}\left((\cos(t)+\sin(t))^2 - 1\right)\right) - \frac{3}{2}\left((\cos(t)+\sin(t))^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Notant $$\forall u \in \mathbb{R} \qquad g(u) = u^3 + 3u^2 - 3u - 3$$

On a $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = -\frac{1}{2} g(\cos(t)+\sin(t)) = -\frac{1}{2} g(\sqrt{2}\cos(t-\pi/4))$$

Une étude fonctions permet de voir que sur $\left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$, la fonction g atteint ses extremums en $u = -\sqrt{2}$ et $u = \sqrt{2} - 1$ et

$$\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \iff t = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 \iff t \in \left\{\frac{\pi}{4} \pm \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\operatorname*{Sup}_{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)} f(x,y) = \varphi(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \left\{\frac{\pi}{4} \pm \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\\
&\operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)} f(x,y) = \varphi(\cos(\beta), \sin(\beta)) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(x_i, y_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une suite de points ($n \geqslant 2$) dont les abscisses ne sont pas toutes égales. On pose

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. Montrer $$f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\|\to+\infty]{} +\infty$$
3. Établir que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser là où il est atteint.

Corrigé : 1. La fonction f est polynomiale donc

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

2. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, on note $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Il vient

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_i(ax_i+b) + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= (a^2+b^2)g(\alpha,\beta) - 2\sqrt{a^2+b^2}\,h(\alpha,\beta) + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}$$

avec $$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2 \quad \text{et} \quad h(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\alpha x_i + \beta)$$

Les fonctions g et h sont continues et atteignent donc leurs bornes sur la sphère unité compacte $\mathrm{S}(0,1)$. On pose

$$\lambda = \operatorname*{Min}_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{S}(0,1)} g(\alpha,\beta) \qquad \mu = \operatorname*{Max}_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{S}(0,1)} h(\alpha,\beta) \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Comme les abscisses x_i ne sont pas toutes égales, on a $\lambda > 0$. Par suite

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \qquad f(a,b) \geqslant (a^2+b^2)\lambda - 2\mu\sqrt{a^2+b^2} + \gamma$$

Par comparaison, il vient $$\boxed{f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\|\to+\infty]{} +\infty}$$

3. Il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $f(a,b) \geqslant f(0,0)$ pour $\|(a,b)\| > \mathrm{R}$. Et comme on a $f(0,0) \geqslant \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(a,b)$, il s'ensuit

$$\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b) = \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(a,b)$$

Comme l'espace $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, la boule fermée $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ est un compact et la fonction continue f y admet donc un minimum. Par conséquent, la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc la fonction f atteint son minimum en un point critique. Par dérivation, on a pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \end{cases}$$

Pour la suite, on note

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \qquad \sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

Il vient alors

$$\nabla f(a,b) = (0,0) \iff \begin{cases} a(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) + b\bar{x} - \sigma_{x,y} - \bar{x}\bar{y} = 0 \\ a\bar{x} + b - \bar{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{y} = a\bar{x} + b \\ a\sigma_x^2 - \sigma_{x,y} = 0 \end{cases}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint un minimum global en } (a^*, b^*) \text{ avec } a^* = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \text{ et } b^* = \bar{y} - a^*\bar{x}.}$$

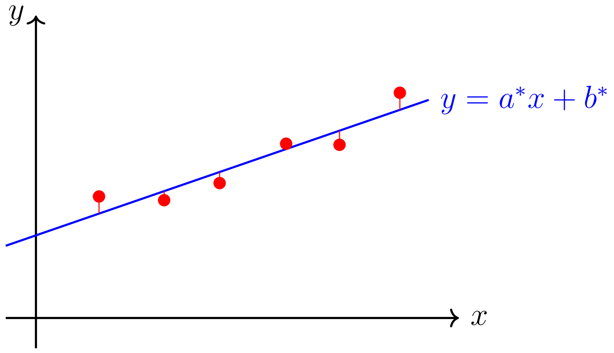

Figure 3 – Droite des moindres carrés

Remarque : Il s'agit bien évidemment de la *droite des moindres carrés.* Il s'agit d'un minimum global strict puisque la fonction f admet un unique point critique.

Exercice 4 (****)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et A : $(a, 0)$. Déterminer les points M et N de $\mathcal{C}$ tels que l'aire du triangle AMN soit maximale.

Corrigé : On paramètre M et N par M : $(a\cos(t), b\sin(t))$, N : $(a\cos(u), b\sin(u))$ avec $(t, u) \in \Delta$ où

$$\Delta = \left\{(x,y) \in [\,0\,;2\pi\,]^2 \mid t \leqslant u\right\}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle AMN est donnée par

$$\mathcal{A}(t,u) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AN}})\right|$$

avec $\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AN}}) = \begin{vmatrix} a\cos(t) - a & a\cos(u) - a \\ b\sin(t) & b\sin(u) \end{vmatrix} = ab\,[(\cos(t) - 1)\sin(u) - (\cos(u) - 1)\sin(t)]$

La famille $(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AN}})$ est orientée en sens direct donc son déterminant est positif. Ce n'est pas flagrant *a priori* dans l'expression. Avec les formules trigonométriques $1 - \cos x = 2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\sin x = 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ pour x réel, on obtient

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AN}}) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{u-t}{2}\right)$$

Tous les angles concernés sont alors dans $[\,0\,;\pi\,]$ et donc de sinus positif. Ainsi, on a

$$\mathcal{A}(t,u) = \frac{ab}{2}\,[(\cos(t) - 1)\sin(u) - (\cos(u) - 1)\sin(t)]$$

L'ensemble Δ est compact car fermé borné en dimension finie. La fonction $\mathcal{A}$ est continue comme composée de telles fonctions et atteint son maximum sur le compact Δ. Celui-ci est localisé sur $\partial\Delta$ ou dans $\mathring{\Delta}$.

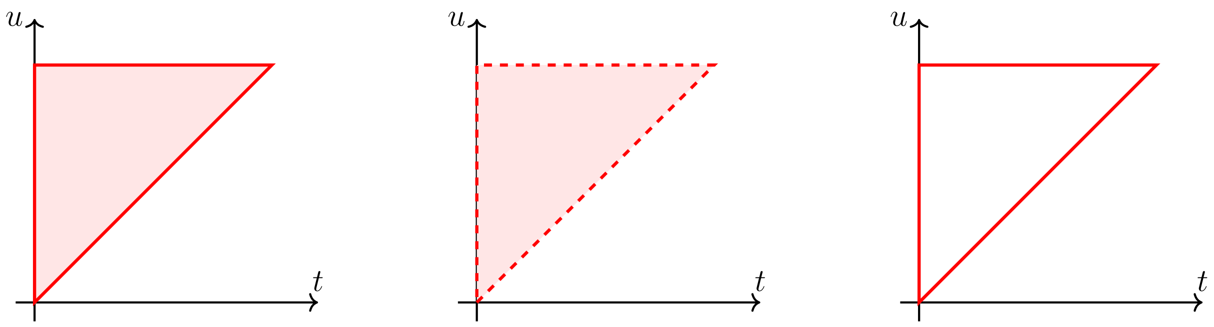

FIGURE 4 – Domaines Δ, $\mathring{\Delta}$ et $\partial\Delta$

On a $\qquad \forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \mathcal{A}(0,t) = 0 \qquad \mathcal{A}(t,2\pi) = 0 \qquad \mathcal{A}(t,u) = 0$

Et avec l'expression sous forme de produit de sinus, on peut détailler sur $\mathring{\Delta}$ et on obtient

$$\forall (t,u) \in \partial\Delta \qquad \mathcal{A}(t,u) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (t,u) \in \mathring{\Delta} \qquad \mathcal{A}(t,u) > 0$$

La fonction $\mathcal{A}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{A}$ comme composée de telles fonctions et elle atteint son maximum sur Δ dans l'ouvert $\mathring{\Delta}$ et donc en un point critique. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(t,u) = \dfrac{ab}{2}\left[-\sin(t)\sin(u) - (\cos(u)-1)\cos(t)\right] = \dfrac{ab}{2}\left[\cos(t) - \cos(t-u)\right] \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial u}(t,u) = \dfrac{ab}{2}\left[(\cos(t)-1)\cos(u) + \sin(u)\sin(t)\right] = \dfrac{ab}{2}\left[\cos(t-u) - \cos(u)\right] \end{cases}$$

Ainsi $\quad \nabla\mathcal{A}(t,u) = (0,0) \iff \begin{cases} \cos(t) - \cos(t-u) = 0 \\ \cos(t-u) - \cos(u) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(u) \\ \cos(t) - \cos(t-u) = 0 \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} u = 2\pi - t \\ \cos(t) - \cos(2t) = 0 \end{cases}$$

et avec la relation $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ pour t réel, on obtient après factorisation

$$\nabla\mathcal{A}(t,u) = (0,0) \iff \begin{cases} u = 2\pi - t \\ (2\cos(t)+1)(\cos(t)-1) = 0 \end{cases} \qquad \iff (t,u) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'aire du triangle est maximale pour les points M} : \left(-\frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et N} : \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right).}$$

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}^2\}$ et on définit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : On a $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'\,(tx + (1-t)y)\;\mathrm{d}t$

Posons
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{G}(x,y) = \int_0^1 f'\,(tx + (1-t)y)\;\mathrm{d}t$$

Pour k entier, on note $\mathscr{P}(k)$ la propriété suivante :
$$\forall (i_1, \ldots, i_k) \in [\![\, 1\,;\,2 \,]\!]^k \qquad \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G} \text{ existe et est continue sur } \mathbb{R}^2$$

et
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G}(x,y) = \int_0^1 t^{\alpha_k}(1-t)^{\beta_k} f^{(k+1)}(tx + (1-t)y)\,\mathrm{d}t$$

avec $\alpha_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\{1\}}(i_j)$ et $\beta_k = k - \alpha_k$.

L'initialisation pour $k = 0$ consiste en la continuité de G :
• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $t \mapsto f'\,(tx + (1-t)y) \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$.
• Pour $t \in [\,0\,;1\,]$, on a $(x,y) \mapsto f'\,(tx + (1-t)y)$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
• **Domination locale :** Soit K compact de $\mathbb{R}^2$. L'application $(x,y,t) \mapsto f'(tx + (1-t)y)$ est continue donc bornée sur le compact $\mathrm{K} \times [\,0\,;1\,]$ et la domination s'ensuit. On en déduit la continuité de G sur tout compact de $\mathbb{R}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{G} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

On suppose la propriété vraie pour k entier et $i_{k+1} = 1$. On fixe y réel et on pose
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad g_k(x,t) = t^{\alpha_k}(1-t)^{\beta_k} f^{(k+1)}(tx + (1-t)y)$$

• Pour x réel, la fonction $g_k(x,\cdot)$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$ donc bornée et par conséquent intégrable sur $[\,0\,;1\,]$.
• Pour t réel, la fonction $g_k(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par dérivation
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,] \qquad \partial_x g_k(x,t) = t^{\alpha_{k+1}}(1-t)^{\beta_{k+1}} f^{(k+2)})(tx + (1-t)y)$$

• Pour x réel, la fonction $\partial_x g_k(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$.
• **Domination locale :** Soit J segment de $\mathbb{R}$. L'application $(x,t) \mapsto \partial_x g_k(x,t)$ est continue donc bornée sur le compact $\mathrm{J} \times [\,0\,;1\,]$ et la domination s'ensuit. On en déduit que pour y fixé, l'application $x \mapsto \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G}(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ et par dérivation sous l'intégrale
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \partial_{i_{k+1}} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G}(x,y) = \int_0^1 t^{\alpha_{k+1}}(1-t)^{\beta_{k+1}} f^{(k+2)}(tx + (1-t)y)\,\mathrm{d}t$$

On montre comme on l'a fait pour la fonction G la continuité de $\partial_{i_{k+1}} \ldots \partial_{i_1}\mathrm{G}$ sur $\mathbb{R}^2$. La preuve est similaire pour $i_{k+1} = 2$ et ceci clôt la récurrence. On conclut que la fonction G admet des dérivées partielles à tout ordre et que celles-ci sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction G de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ prolonge la fonction F.}}$$

Exercice 6 (****)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On définit
$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + \mathrm{i}y)^n$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. On pourra montrer le caractère $\mathscr{C}^1$ puis généraliser le procédé employé.

2. Déterminer Δf.

Corrigé : 1. Soit $y \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ et $\mathrm{I} = \left]-\sqrt{\mathrm{R}^2 - y^2}\,;\sqrt{\mathrm{R}^2 - y^2}\right[$. On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{I} \qquad u_n(x) = a_n(x + \mathrm{i}y)^n$$

Pour n entier, on a u_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car polynomiale. Par dérivation, on trouve

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \qquad u_n'(x) = na_n(x + \mathrm{i}y)^{n-1}$$

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$ convergent normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. On en déduit que la série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ $\sum u_n$ converge simplement sur I et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-r\,;r] \subset \mathrm{I}$ puisque le compact $[-r\,;r] \times \{y\}$ est inclus dans $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I avec

$$\forall (x, y) \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + \mathrm{i}y)^{n-1}$$

Par ailleurs, la fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue sur $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ puisque c'est la composée de $(x, y) \mapsto (x + \mathrm{i}y)$ linéaire avec la fonction $z \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ somme de série entière donc continue sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. Ainsi, on l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et sa continuité sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. On procède à l'identique pour la dérivée partielle en y. Puis, on applique ce résultat sur les fonctions dérivées partielles premières et on prouve l'existence et la continuité des dérivées partielles de f d'ordre 2 sur $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$. On conclut

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{B}(0, \mathrm{R}), \mathbb{C})}$$

2. En appliquant les résultats établis à la première question, on a

$$\forall (x, y) \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x + \mathrm{i}y)^{n-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{i}na_n(x + \mathrm{i}y)^{n-1}$$

puis
$$\forall (x, y) \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(x + \mathrm{i}y)^{n-2}$$

et
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\mathrm{i})^2 n(n-1)a_n(x + \mathrm{i}y)^{n-2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

On conclut
$$\boxed{\Delta f = 0}$$

Remarque : La fonction f est dite *harmonique*.