ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°76

Exercice 1 (*)

Étudier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions suivantes :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(xy)$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = |xy|$

Exercice 2 (**)

Étudier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \mathrm{e}^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 (**)

On note $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-xy)}{xy} & \text{si } (x,y) \in \mathrm{D} \smallsetminus \Delta \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que D est ouvert de $\mathbb{R}^2$ et préciser la nature topologique de Δ.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{D}, \mathbb{R})$.

Exercice 4 (**)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 5 (*)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^3 + y^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (*)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-y)^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (**)

On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)=x^2+y^3$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Exercice 8 (**)

On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)=x^2+xy+y^2$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Exercice 9 (**)

On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)=xy(1-x-y+xy)$

Étudier les extremums de f sur $[\,0\,;1\,]^2$.

Exercice 10 (*)

On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)=2x+y \quad \text{et} \quad g(x,y)=x^2+y^2-5$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x,y)=0$.

Exercice 11 (**)

On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y)=xy \quad \text{et} \quad g(x,y)=x^2+4y^2-8$

Étudier les extremums de f sous la contrainte $g(x,y)=0$.