Feuille d'exercices n°78

Exercice 1 (***)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]^2$.

Indications : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en considérant successivement $f(x+\pi,y)$, $f(x,y+\pi)$ puis $f(\pi-x,\pi-y)$, observer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $[0\,;\pi]^2$ puis à

$$\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in [0\,;\pi]^2 \mid x+y \leqslant \pi\right\}$$

Préciser la nature topologique de A puis distinguer les situations sur $\mathring{\mathrm{A}}$ et sur $\partial\mathrm{A}$.

Exercice 2 (****)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.

Indications : Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer ses points critiques et procéder à une étude du deuxième ordre. Sur $\mathrm{B}_f(0,1)$, établir que les extremums sont atteints sur la frontière puis écrire $f(\cos(t),\sin(t))$ avec t réel sous la forme $-\frac{1}{2}g(\cos(t)+\sin(t))$ avec g polynomiale unitaire de degré 3 et conclure.

Exercice 3 (***)

Soit $(x_i,y_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une suite de points ($n \geqslant 2$) dont les abscisses ne sont pas toutes égales. On pose

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
2. Montrer $\qquad f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\|\to+\infty]{} +\infty$
3. Établir que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser là où il est atteint.

Indications : 2. Exprimer $f(a,b)$ à l'aide de $g(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta)^2$ et $h(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\alpha x_i+\beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathrm{S}(0,1)$ sphère unité de $\mathbb{R}^2$ et préciser la topologie de $\mathrm{S}(0,1)$.
3. Justifier l'égalité $\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b) = \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} f(a,b)$ avec $\mathrm{R} > 0$ puis utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Exercice 4 (****)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et A : $(a,0)$. Déterminer les points M et N de $\mathcal{C}$ tels que l'aire du triangle AMN soit maximale.

Indications : En paramétrant M : $(a\cos(t), b\sin(t))$, N : $(a\cos(u), b\sin(u))$ avec $\Delta : 0 \leqslant t \leqslant u \leqslant 2\pi$, exprimer $\mathcal{A}(t,u)$ à l'aide d'un déterminant puis utiliser du calcul différentiel.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $\Delta = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}^2\}$ et on définit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta \qquad \mathrm{F}(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Montrer que F se prolonge en fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indications : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \Delta$, écrire $\mathrm{F}(x,y)$ comme une intégrale entre 0 et 1. En déduire la fonction G qui prolonge naturellement F sur $\mathbb{R}^2$. Montrer ensuite la continuité de G sur $\mathbb{R}^2$ puis l'existence de $\dfrac{\partial^k \mathrm{G}}{\partial x^k}$ pour tout $k \geqslant 1$. Étendre ce résultat en y par symétrie et justifier la continuité des dérivées partielles à tout ordre.

Exercice 6 (****)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On définit

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \qquad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+\mathrm{i}y)^n$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$. On pourra montrer le caractère $\mathscr{C}^1$ puis généraliser le procédé employé.
2. Déterminer Δf.

Indications : 1. Fixer $y \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$ puis montrer que $x \mapsto f(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} = \left]-\sqrt{\mathrm{R}^2-y^2}\,;\sqrt{\mathrm{R}^2-y^2}\right[$. On pourra considérer $\sum u_n$ avec $u_n(x) = a_n(x+\mathrm{i}y)^n$. Montrer ensuite la continuité de $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sur $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$.