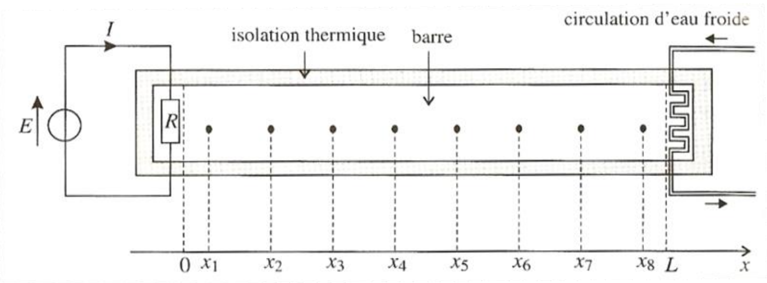
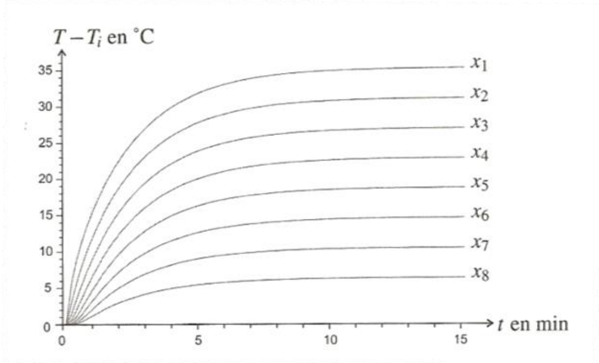
TD TRANSFERTS THERMIQUES

Exercice 1* : MESURE D'UNE CONDUCTIVITE THERMIQUE





Une barre de section constante $S = 2{,}0.10^{-4}\text{m}^2$ est calorifugée sur sa surface latérale.
D'un côté elle est équipée d'un dispositif de chauffage (résistance électrique) de puissance $P_{Joule} = 15$W.
De l'autre côté son extrémité est maintenue à température constante par une circulation d'eau froide.
Des sondes de température régulièrement espacées sont disposées le long de la barre. La distance entre deux capteurs est $d = 22.10^{-3}$m. On enregistre les températures des capteurs au cours du temps. La figure ci-dessus en donne une simulation.

1) Evaluer le gradient de température dans la barre en régime stationnaire.
2) En déduire la conductivité thermique de la barre.

Exercice 2*♥ : DOUBLE VITRAGE

On ne considère que des régimes permanents.
L'intérieur d'une pièce est séparée de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité thermique K. Ses faces internes et externes sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e<T_i$.

1) La paroi est une vitre simple d'épaisseur e.

Exprimer le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de K, S, e, T_i et T_e.
Exprimer la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.

2) La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité K'. On ne tient compte que de la conduction.
   a) Evaluer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce puis Φ_2/Φ_1.
   b) AN : $T_e = 270$K, $T_i = 292$K, e' = e = 3mm, $K = 1{,}2\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $K' = 0{,}025\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Calculer Φ_2/Φ_1 et les températures T_1 et T_2 des faces en regard des deux vitres. Tracer T(x).

3) On tient compte, en plus de la conduction, d'échanges conducto-convectifs entre le verre et l'air de coefficient h (h_e entre le verre et l'air extérieur et h_i entre le verre et l'air intérieur).
   a) Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R^{cc} et la calculer.
   b) Exprimer les nouveaux flux Φ'_1 et Φ'_2 (des questions 1 et 2) en fonction de T_i, T_e, h_i, h_e, e, K, K' , e' et S puis Φ'_2/Φ'_1

   AN : $h_i = 10\ \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, $h_e = 14\ \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Calculer Φ'_2/Φ'_1. Conclure.

Exercice 3**♥ : EVACUATION DE LA CHALEUR DANS UN BARREAU D'URANIUM

Un barreau cylindrique a un diamètre D = 29 mm .
Les réactions nucléaires qui s'y produisent dégagent une puissance volumique p.
La conductivité thermique de l'uranium est $\lambda = 27\ \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

1) Déterminer en régime stationnaire la répartition de température dans le barreau.

A la périphérie la température vaut $T_e = 200$°C. Que vaut T_{max} ?

2) L'uranium fond à $T_f = 1232$ °C. Déterminer la puissance volumique p maximale que l'on peut extraire du barreau si l'on ne veut pas dépasser cette température.

Exercice 4$^{**♥}$: FUSIBLE

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire S, de longueur utile L = 2,5cm, de conductivité thermique $\lambda = 65 W.m^{-1}K^{-1}$ et de conductivité électrique $\gamma=1,2.10^6 S.m^{-1}$. Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité I et il est enfermé dans une capsule assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les extrémités du fil, en x=0 et x=L, sont de température égale à la température du milieu ambiant $T_0 = 290K$. On se place en régime stationnaire.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la température T(x) dans le fil. La résoudre et représenter graphiquement la fonction T(x).
2) Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 390K$. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16A$. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max}. Calculer l'aire S de la section de ce fusible de 16A.
3) Exprimer le flux thermique $\Phi(0)$ à travers la section x=0 en fonction de la résistance R du fil et de I. Commenter.

Exercice 5** : PRODUCTION D'ENTROPIE PAR TRANSFERT THERMIQUE

Considérons une barre cylindrique de conductivité thermique λ, de section S et de longueur L, calorifugée latéralement. Ses extrémités sont maintenues aux températures $T(x=0)=T_0$ et $T(x=L)=T_1$. On suppose que le régime stationnaire est atteint.

Déterminer la production d'entropie par unité de temps due à l'irréversibilité de ce transfert thermique.

Exercice 6$^{**♥}$: VARIATIONS DE TEMPERATURE DU SOL TERRESTRE

On modélise la terre par un milieu semi-infini ($x > 0$) dont la surface est soumise à une variation de température : $T(0,t) = T_0 + (T_1- T_0) \cos(\omega t)$

La diffusivité thermique $K = 6.5.10^{-7} m^2.s^{-1}$ de ce milieu est supposée constante.

1) Que représentent T_0 et $\Delta T = T_1-T_0$?
2) Ecrire l'équation de la chaleur à une dimension, en utilisant la variable $\theta(x,t) = T(x,t)-T_0$.
3) Chercher des solutions sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques de vecteur d'onde éventuellement complexe.
4) Donner l'expression de T(x,t) en calculant les constantes d'intégration par application des conditions aux limites.
5) Calculer la profondeur δ pour laquelle l'amplitude de $\theta(x,t)$ est divisée par e (=2,71).
6) AN : Calculer δ pour les variations journalières et annuelles de température à la surface de la Terre. Conclusion : commenter l'impact sur la végétation d'une gelée brutale d'une nuit ou d'un long hiver.
7) Vers quelle date la température est minimale à une profondeur de 2 mètres en supposant que la température au sol est minimale au 1er février ?

Résolutions de problèmes :

Exercice 7$^{**♥}$: BILAN THERMIQUE D'UN BATIMENT

On considère un bâtiment dont les murs et le toit présentent une surface avec l'extérieur égale à 500 m^2.
Les murs (pour simplifier sans fenêtre) et le toit sont supposés avoir une épaisseur de 50 cm.
La conductivité thermique du mur et du toit est $\lambda = 0,5 W.m^{-1}.K^{-1}$. Le coefficient de conducto-convection avec l'air intérieur est $h_i = 1 W.m^{-2}.K^{-1}$ et avec l'air extérieur $h_e = 6 W.m^{-2}.K^{-1}$
On veut maintenir la température interne égale à 18°C alors que la température externe est de -10°C, à l'aide d'un chauffage au fioul. Le pouvoir calorifique du fioul est $P_f = 2.10^4 kJ.kg^{-1}$.
Calculer la quantité de fioul consommée pendant 6 mois pour maintenir la température intérieure à 18°C.

Exercice 8$^{**♥}$: SURVIE EN MONTAGNE

Quelle épaisseur faut-il donner à un igloo pour survivre ? Par son métabolisme, un être humain dégage une puissance de 50 W; bien couvert, il survit à 10°C; dehors, il fait −10°C.
La conductivité thermique de la glace est $\lambda = 0,05 W.K^{-1}.m^{-1}$.

Exercice 9**♥ : ATTENTION CAFE CHAUD !

Un gobelet cylindrique en polystyrène de rayon a et d'épaisseur e contient du café à la température θ_1 = 80°C. Le polystyrène expansé a un coefficient de diffusion thermique λ et les échanges thermiques à travers la surface de séparation entre le gobelet et l'air extérieur à la température θ_2 = 20°C peuvent être modélisés par la loi de Newton : $\varphi = h(\theta - \theta_2)$ où θ désigne la température à la surface du solide et h le coefficient de transfert thermique entre le polystyrène et l'air.
En précisant clairement les approximations faites, déterminer l'épaisseur minimale du gobelet pour qu'on ne se brûle pas (θ < 50°C).
A.N. : h = 10 USI ; λ = 0,04 USI.

Exercice 10***♥ : GEL D'UN LAC

On considère un modèle unidirectionnel (d'axe vertical descendant). A partir du temps t = 0, la température de l'air (dans le demi espace z < 0) passe brusquement de T_F = 273 K, température d'équilibre glace-eau sous la pression atmosphérique Pa, à Ta = 253 K et reste constante pendant tout l'hiver (on simplifie, bien sûr). Il se forme une couche de glace d'épaisseur e(t) . En z = e(t) l'eau gèle sous une pression qu'on considère comme constante (Pa, on simplifie là aussi) et donc à T_F.
Dans la glace, la température est T(z, t). Sous la glace, des mouvements de convection uniformisent la température de l'eau à T_F . La glace a une masse volumique $\mu = 0{,}90.10^3$kg.m^{-3} , une chaleur massique c = 2, 1.10^3 J.kg^{-1}.K^{-1}, une conductivité thermique λ = 2, 0 J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1} et une enthalpie massique de fusion $\Delta_{fus}H^0$ = 0, 33.10^6 J.kg^{-1}.

1) On suppose la température continue en z = 0.
a) On suppose le régime comme quasi-stationnaire. Exprimer la puissance thermique traversant la glace.
b) Faire un bilan thermique pour la couche de glace qui gèle entre t et t + dt et en déduire que :
$e\dfrac{de}{dt} = \lambda \dfrac{T_F - T_a}{\mu\, \Delta_{fus}H^\circ}$ et déterminer e(t), avec e(0) = 0.
c) A.N : En combien de temps la glace a-t-elle une épaisseur suffisante pour patiner (disons 10 cm) ?
d) En comparant l'ordre de grandeur du temps caractéristique de la solution et celui de la diffusion, discuter de la validité de l'approximation du régime quasi-stationnaire.

2) Expérimentalement, on constate une discontinuité de température en z = 0.
La température de la glace y est Ts(t) > Ta et on modélise l'échange thermique en surface par une puissance surfacique $\varphi = h(Ta-Ts(t))$ où h = 20 J.s^{-1}.m^{-2}.K^{-1}.
a) Exprimer Ts en fonction de l'épaisseur e(t) et des autres constantes du problème.
b) A.N : Calculer Ts pour e = 10 cm et commenter.

Réponses :

Ex 1 : 1) $\dfrac{dT}{dx}$ = -1,9.10^2 K.m^{-1} *2)* $\lambda = \dfrac{P_{joule}}{S\left|\frac{dT}{dx}\right|}$= 3,9.10^2 W.m^{-1}.K^{-1}

Ex 2 : 2) $\dfrac{\phi_2}{\phi_1} = \dfrac{e/K}{2e/K+e'/K'}$=0,02 *3)* $\dfrac{\phi'_2}{\phi'_1} = \dfrac{\frac{1}{h_i}+\frac{e}{K}+\frac{1}{h_e}}{\frac{1}{h_i}+2\frac{e}{K}+\frac{e'}{K'}+\frac{1}{h_e}}$=0,59

Ex 3 : 1) $T(r) = T_e - \dfrac{P}{4\lambda}\left(r^2-\dfrac{D^2}{4}\right)$ $T_{max} = T_e + \dfrac{pD^2}{16\lambda}$ *2)* $p_{max} = \dfrac{16\lambda}{D^2}\left(T_f - T_e\right) = 5{,}3.10^8 W.m^{-3}$

Ex 4 : 1) $T(x) = T_0 + \dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2}(Lx - x^2)$ *2)* $S = \dfrac{I_{max}L}{\sqrt{8\gamma\lambda(T_F-T_0)}}$ = 1,6 mm^2 *3)* $\Phi(0) = -\frac{1}{2}RI^2$

Ex 5 : $\dfrac{\delta S_{créée}}{dt} = \dfrac{\lambda S(T_0-T_1)^2}{L\,T_0T_1} > 0$

Ex 6 : 4) $T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\sqrt{\omega/2K}x}\cos\left(\omega t - \sqrt{\omega/2K}x\right)$ *5)* $\delta = \sqrt{\dfrac{2K}{\omega}} = \sqrt{\dfrac{KT}{\pi}}$ *6)* $\delta_{1\,Jour}$=13 cm $\delta_{1\,an}$ =2,6 m

Ex 7 : $m = \dfrac{S.\Delta T.\Delta t}{P_f\left(\frac{e}{\lambda}+\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_e}\right)}$= 5025 kg.

Ex 8 : $e = \dfrac{R_1}{\frac{P_{prod}}{2\pi\lambda R_1 \Delta T}-1}$ = 14 cm pour R_1 = 1 m

Ex 9 : Avec l'hypothèse e << a, par continuité du flux thermique en r =a, $e = \dfrac{\lambda}{h}\dfrac{T_{paroi}-T_{int}}{T_{air}-T_{paroi}}$=4 mm

Ex 10 : 1) $e(t) = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\mu\,\Delta_{fus}H^\circ}(T_F - T_a)t}$ *AN : e=10cm pour t=10h* *2)* $T_S = \dfrac{hT_a+\frac{\lambda}{e}T_F}{h+\frac{\lambda}{e}}$ = 263 K