Feuille d'exercices n°70

Exercice 1 (*)

L'application $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle surjective ? injective ?

Corrigé : On a $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc l'exponentielle n'est pas surjective. Par ailleurs, notant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, 0, \ldots, 0)$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n = \mathrm{e}^0$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'exponentielle de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$$

Exercice 2 (**)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = 3x - y + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = 2x - \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 3x - y + \mathrm{e}^{t} \\ y' = 2x - \mathrm{e}^{t} \end{cases}$

Corrigé : 1. Étudions le cas d'une solution particulière évidente de la forme $x(t) = a\mathrm{e}^{-t}$ et $y(t) = b\mathrm{e}^{-t}$ pour t réel. Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} -a\mathrm{e}^{-t} = 3a\mathrm{e}^{-t} - b\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \\ -b\mathrm{e}^{-t} = 2a\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \iff \begin{cases} 4a - b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \iff (a, b) = (0, 1)$$

La stratégie est payante. Il ne reste plus qu'à résoudre le système homogène

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 2x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Réduisons A. On a

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - 3 & 1 \\ -2 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - 2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{1, 2\}$$

On trouve une matrice de passage $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(1, 2)$. Pour $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ reliée par $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, on a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{Y} \iff \begin{cases} u' = u \\ v' = 2v \end{cases}$$

d'où $$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} u(t) = \alpha\mathrm{e}^{t} \\ v(t) = \beta\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

et ensuite $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{t} \\ \beta\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, les solutions sont de la forme

$$\boxed{\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t)=\alpha \mathrm{e}^{t}+\beta \mathrm{e}^{2t} \\ y(t)=2\alpha \mathrm{e}^{t}+\beta \mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-t} \end{cases}}$$

Remarque : On peut aussi résoudre le système réduit avec second membre

$$\mathrm{X}'=\mathrm{AX}+\mathrm{B}(t) \iff \mathrm{Y}'=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APY}+\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}(t)$$

qui requiert le calcul de P^{-1}. L'effort calculatoire est équivalent à celui de la méthode présentée ci-avant.

2. Le système homogène associé est le même que celui de la question précédente. La recherche d'une solution particulière évidente de la forme $x(t)=a\mathrm{e}^{t}$ et $y(t)=b\mathrm{e}^{t}$ pour t réel donne

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} a\mathrm{e}^{t}=3a\mathrm{e}^{t}-b\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{t} \\ b\mathrm{e}^{t}=2a\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t} \end{cases} \iff \begin{cases} 2a-b=-1 \\ 2a-b=1 \end{cases}$$

qui est évidemment incompatible. Procédons à une variation de la constante. Soient $\lambda,\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables et X de la forme

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t)=\lambda(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+\mu(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}$$

On résout pour t réel

$$\lambda'(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{t}+\mu'(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t}\\-\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

puis
$$\begin{cases} \lambda(t)=-2t+\alpha \\ \mu(t)=-3\mathrm{e}^{-t}+\beta \end{cases}$$

avec α, β réels. Ainsi, les solutions sont de la forme

$$\boxed{\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t)=-2t\mathrm{e}^{t}+(\alpha-3)\mathrm{e}^{t}+\beta \mathrm{e}^{2t} \\ y(t)=-4t\mathrm{e}^{t}+(2\alpha-3)\mathrm{e}^{t}+\beta \mathrm{e}^{2t} \end{cases}}$$

Remarque : La même variante que celle précédemment mentionnée fonctionne. Sa mise en œuvre requiert également une variation de la constante mais sur deux équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exercice 3 (*)

On pose
$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\mathrm{i}\pi\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\pi & 0\\ 0 & -2\mathrm{i}\pi\end{pmatrix}$$

Calculer $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$. Qu'observe-t-on ?

Corrigé : La matrice A est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(0,2\mathrm{i}\pi)$. Il s'ensuit $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}=\mathrm{e}^{\mathrm{B}}=\mathrm{I}_2$. De même, la matrice $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(2\mathrm{i}\pi,0)$ d'où $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}=\mathrm{I}_2$. Or, on trouve

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}0 & -2\mathrm{i}\pi\\ 0 & 4\pi^2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 2\mathrm{i}\pi\\ 0 & 4\pi^2\end{pmatrix}=\mathrm{BA}$$

Ainsi $\boxed{\text{On peut avoir } \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}}=\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} \text{ sans que les matrices A et B ne commutent.}}$

Exercice 4 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et p un projecteur de E. Expliciter $\exp(p)$ puis calculer $\det(\exp(p))$ et $\mathrm{Tr}\,(\exp(p))$.

Corrigé : On a $p^2 = p$ puis $p^k = p$ pour tout k entier non nul par récurrence immédiate. On obtient

$$\boxed{\exp(p) = \mathrm{id} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) p = \mathrm{id} + (\mathrm{e} - 1)p}$$

Dans $\mathscr{B}$ une base adaptée à p, c'est-à-dire une base adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p) \oplus \mathrm{Ker}\, p$, on trouve

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id} + (\mathrm{e} - 1)p) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}\,\mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{rg}\; p$$

D'où $$\boxed{\det \exp(p) = \mathrm{e}^{\mathrm{rg}\, p} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\, \exp(p) = \mathrm{e}\; \mathrm{rg}\; p + (\dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}\; p)}$$

Exercice 5 (**)

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 3

$$x^{(3)} - x = 0 \tag{H}$$

1. Déterminer une expression réelle des solutions de l'équation différentielle (H).
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(x(0), x'(0), x''(0))$ pour avoir une solution $(t \mapsto x(t))$ convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé : 1. Soit x solution de (H). On pose $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$. Ainsi, avec $x^{(3)} = -x$, on obtient

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ x^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} \iff \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons A. On a, en développant la première colonne,

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{X} & -1 \\ -1 & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^3 - 1 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{1, j, \bar{j}\} \quad \text{avec} \quad j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$$

D'après la condition suffisante de diagonalisation, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et on en déduit que $(t \mapsto \mathrm{e}^t, t \mapsto \mathrm{e}^{jt}, t \mapsto \mathrm{e}^{\bar{j}t})$ forme une base de l'ensemble des solutions vu comme $\mathbb{C}$-ev. Or, si une fonction x vérifie $x^{(3)} - x = 0$, passant à la partie réelle et imaginaire, il s'ensuit que $\mathrm{Re}\; x$ et $\mathrm{Im}\; x$ sont solutions. Ainsi, la famille $(t \mapsto \mathrm{e}^t, t \mapsto \mathrm{Re}\; \mathrm{e}^{jt}, t \mapsto \mathrm{Im}\; \mathrm{e}^{jt})$ est une famille réelle de solutions, clairement libre et par conséquent

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \gamma \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}$$

2. On a $$\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

Ainsi, pour x solution de (H), on a

$$x \text{ convergente sur } \mathbb{R}_+ \iff \alpha = 0$$

Puis, avec les formules d'Euler, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \frac{\beta - \mathrm{i}\gamma}{2}\mathrm{e}^{jt} + \frac{\beta + \mathrm{i}\gamma}{2}\mathrm{e}^{\bar{j}t}$$

expression plus propice à la dérivation que celle d'origine et on obtient

$$x(0) + x'(0) + x''(0) = 3\alpha$$

$$\boxed{\text{Une solution } x \text{ de (H) converge sur } \mathbb{R}_+ \text{ si et seulement } x(0) + x'(0) + x''(0) = 0.}$$

Exercice 6 (**)

Calculer e^{A} dans les cas suivants :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Corrigé : 1 . On trouve $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-2)^2$ qui est annulateur de A d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On a $\pi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-2)^2$ car A n'est pas $2\mathrm{I}_2$. Le reste de la division euclidienne de X^n par $(\mathrm{X}-2)^2$ (substitution de X par 2 suivi d'une dérivation puis substitution de X par 2) est

$$\mathrm{R} = n2^{n-1}\mathrm{X} + 2^n(1-n)$$

d'où
$$\mathrm{A}^n = n2^{n-1}\mathrm{A} + 2^n(1-n)\mathrm{I}_2$$

Par suite
$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^2\mathrm{A} - \mathrm{e}^2\mathrm{I}_2}$$

Variantes : (a) On décompose $\mathrm{A} = 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2$ avec $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2$ nilpotente d'ordre 2. Les matrices $2\mathrm{I}_2$ et $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2$ commutent et par propriété de l'exponentielle, il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{I}_2}\mathrm{e}^{\mathrm{A}-2\mathrm{I}_2} = \mathrm{e}^2\left(\mathrm{I}_2 + \mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2\right) = \mathrm{e}^2(\mathrm{A} - \mathrm{I}_2)$$

(b) On trigonalise A et on trouve

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{T}\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Puis
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^2(\mathrm{T} - \mathrm{I}_2)$$

On retrouve alors le résultat précédent.

2. On trouve $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$ puis A diagonalisable et $\pi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}}$. Le reste de la division euclidienne de X^n avec n entier non nul par $\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$ est

$$\mathrm{R} = \frac{3^{n-1}-1}{2}\mathrm{X}^2 + \frac{3-3^{n-1}}{2}\mathrm{X}$$

D'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^n = \frac{3^{n-1}-1}{2}\mathrm{A}^2 + \frac{3-3^{n-1}}{2}\mathrm{A}$$

Puis
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^n}{n!} = \mathrm{I}_3 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^n}{n!} = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[(3^n-3)\mathrm{A}^2 + (9-3^n)\mathrm{A}\right]$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_3 + \frac{\mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e} + 2}{6}\mathrm{A}^2 + \frac{9\mathrm{e} - \mathrm{e}^3 - 8}{6}\mathrm{A}}$$

3. On trouve $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2)$ puis A diagonalisable donc $\pi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$. Le reste de la division euclidienne de X^n par $(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ est
$$\mathrm{R} = (2^n - 1)\mathrm{X} + (2 - 2^n)$$

D'où $$\mathrm{A}^n = (2^n - 1)\mathrm{A} + (2 - 2^n)\mathrm{I}_3$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})\mathrm{A} + (2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2)\mathrm{I}_3}$$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall p \geqslant \mathrm{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Corrigé : Par continuité du déterminant (polynomial en les coefficients de la matrice), on a
$$\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \neq 0$$
Par conséquent, on dispose d'un seuil N entier tel que, pour $p \geqslant \mathrm{N}$
$$\left|\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right) - \det \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right| \leqslant \frac{\left|\det \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right|}{2}$$
Par inégalité triangulaire inverse, il vient
$$\forall p \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)\right| \geqslant \frac{\left|\det \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right|}{2} > 0$$

Ainsi $$\boxed{\text{Il existe un seuil N tel que pour } p \geqslant \mathrm{N}\text{, la matrice } \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \text{ est inversible.}}$$

Variante : On a $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dispose donc de $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}, r) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Or, on a
$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$
ce qui prouve que la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)_p$ est à valeurs dans $\mathrm{B}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}, r)$ donc dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$$

Corrigé : L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc de dimension finie et c'est par conséquent un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Or, la suite $\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)_{\mathrm{N}}$ est convergente à valeurs dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ donc sa limite est dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$, autrement dit
$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]}$$

Exercice 9 (*)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{M} = 1$. Calculer e^{M}.

Corrigé : On a la relation $\mathrm{M}^2 = (\operatorname{Tr} \mathrm{M})\mathrm{M}$ puis $\mathrm{M}^k = (\operatorname{Tr} \mathrm{M})^{k-1}\mathrm{M}$ pour k entier non nul. Ainsi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}^k}{k!} = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\operatorname{Tr} \mathrm{M})^{k-1}}{k!}\mathrm{M}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n + \mathrm{M} \text{ si } \operatorname{Tr} \mathrm{M} = 0 \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n + \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{Tr} \mathrm{M}} - 1}{\operatorname{Tr} \mathrm{M}}\mathrm{M} \text{ sinon.}}$$

Exercice 10 (**)

Montrer $$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \exp(\operatorname{Tr}(\mathrm{A}))$$

L'exponentielle est-elle surjective de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On se place dans $\mathbb{C}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$. Il s'ensuit

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}) + \mathrm{Q}$$

avec Q triangulaire supérieure stricte. Par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \mathrm{e}^{\operatorname{Tr}(\mathrm{A})}}$$

On a $\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) > 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, la matrice $\mathrm{D} = -\mathrm{E}_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{E}_{i,i}$ vérifiant $\det(\mathrm{D}) = -1$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \setminus \exp \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\boxed{\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \subsetneq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, on a l'égalité $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mais la démonstration est plus délicate.

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$. Résoudre le système différentiel (H) : $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ et préciser la nature des courbes paramétrées par $t \mapsto \mathrm{X}(t)$.

Corrigé : Soit X solution de (H). On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ avec ω réel. On trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{R}(t\omega)$$

Ainsi, pour $\omega \neq 0$, la courbe paramétrée par $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ est l'ensemble des points obtenus par rotation de centre O d'angle ωt du point (x_0, y_0). Si $\omega = 0$, la courbe est stationnaire au point (x_0, y_0). On conclut

$$\boxed{\text{Les courbes paramétrées solutions sont des cercles de centre O ou sont réduites à un point.}}$$

Variante : On peut procéder de manière naïve. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. On a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \begin{cases} x' = -\omega y \\ y' = \omega x \end{cases}$$

On en déduit que x et y sont deux fois dérivables et par dérivation

$$x'' = -\omega^2 x \quad \text{et} \quad y'' = -\omega^2 y$$

d'où l'existence de α, β, λ et μ réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \qquad y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

Réciproquement, si on injecte ces solutions dans les équation de départ, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \omega\left[-\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)\right] = -\omega\left[\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right]$$

et par liberté de sin et cos, il vient $\alpha = \mu$ et $\beta = -\lambda$ d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\omega t) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

On conclut comme ci-avant.

Exercice 12 (**)

Soit $\mathrm{A} : t \mapsto \mathrm{A}(t)$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{X} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t)$$

1. Montrer $\qquad \mathrm{X}(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer $\qquad \mathrm{X}(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

Corrigé : 1. Posons $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}(t)$ pour t réel. La fonction Y est dérivable et on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{X}'(t)^\top \mathrm{X}(t) + \mathrm{X}(t)^\top \mathrm{X}'(t) = \mathrm{X}(t)^\top \left(\mathrm{A}(t)^\top + \mathrm{A}(t)\right) \mathrm{X}(t) = 0$$

Par suite, la fonction Y est constante et $\mathrm{Y}(0) = \mathrm{X}(0)^\top \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_n$. On en déduit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

2. L'application $\det \circ \mathrm{X}$ est continue par composition et par conséquent l'image $\det \circ \mathrm{X}(\mathbb{R})$ est un connexe par arcs. D'après le résultat de la question précédente, on a $\det \circ \mathrm{X}(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$ et on sait aussi $\det \circ \mathrm{X}(0) = 1$. On en déduit $\det \circ \mathrm{X}(\mathbb{R}) = \{1\}$, autrement dit

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 13 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$;
2. Toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ est de norme $\|\cdot\|$ constante.

Corrigé : Soit X solution de $X' = AX$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \|X(t)\|^2 = X(t)^\top X(t)$$

La fonction φ est dérivable comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) &= X'(t)^\top X(t) + X(t)^\top X'(t)\\ &= (AX(t))^\top X(t) + X(t)^\top AX(t) = X(t)^\top \left(A^\top + A\right) X(t)\end{aligned}$$

Si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors φ' est nulle donc φ constante et donc l'application $t \mapsto X(t)$ est de norme constante. Réciproquement, supposons que toute solution de $X' = AX$ est de norme constante. Soit $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et X la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

On considère l'application φ comme définie précédemment. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(t) = X(t)^\top \left(A^\top + A\right) X(t) = 0$$

En particulier $$\varphi'(0) = {X_0}^\top \left(A^\top + A\right) X_0 = 0$$

La matrice $A^\top + A$ est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme X_0 est quelconque, on peut choisir en particulier $X_0 \neq 0$ tel que $\left(A^\top + A\right) X_0 = \lambda X_0$ avec λ réel et par suite

$$ {X_0}^\top \left(A^\top + A\right) X_0 = \lambda \underbrace{\|X_0\|^2}_{>0} = 0$$

On en déduit $\lambda = 0$, autrement dit $\mathrm{Sp}\left(A^\top + A\right) = \{0\}$ d'où $A^\top + A$ semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle. on conclut

$$\boxed{\text{Les deux assertions sont équivalentes.}}$$

Remarque : On peut procéder sans recours au théorème spectral pour la réciproque. On pose $S = A^\top + A$ avec $S = \left(s_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Par une technique de polarisation, on constate

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad s_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\langle E_i + E_j, S(E_i + E_j)\rangle - \langle E_i - E_j, S(E_i - E_j)\rangle\right)$$

et on peut choisir $X_0 = E_i + E_j$ ou $E_i - E_j$ avec $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ dans l'égalité ${X_0}^\top S X_0 = 0$. On en déduit la nullité de S.

Exercice 14 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Établir

$$AB = BA \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$$

Corrigé : L'implication directe découle de la propriété de l'exponentielle matricielle. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA} e^{tB}$$

Supposons que φ est la fonction nulle. On a $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par dérivation, il vient pour t réel

$$\varphi'(t) = (A + B) e^{t(A+B)} - A e^{tA} e^{tB} - e^{tA} e^{tB} B$$

et $$\varphi''(t) = (A + B) e^{t(A+B)} (A + B) - A^2 e^{tA} e^{tB} - e^{tA} e^{tB} B^2$$

Or, on a $\varphi''(0) = 0$ d'où $$(A + B)^2 - A^2 - B^2 = 0$$

On conclut $$\boxed{AB = BA \iff \forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}}$$