ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°71

Exercice 1 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Pour α réel, on note

$$\mathrm{U}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{U}(\alpha)$ avec α réel.
2. Déterminer la nature des courbes paramétrées solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$.

Corrigé : 1. On a $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^\top) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^3 \det(\mathrm{A}) = -\det(\mathrm{A})$ d'où $\det(\mathrm{A}) = 0$ et par conséquent 0 est valeur propre de A. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. L'endomorphisme u est *antisymétrique*, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

et l'induit par u sur un sev stable est clairement antisymétrique. Pour F sev stable par u, on a $\mathrm{F}^\perp$ stable par u. En effet, soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. On a

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, \underbrace{u(y)}_{\in \mathrm{F}}\rangle = 0$$

Soit $\varepsilon_1 \in \mathrm{E}_0(u)$ vecteur normée avec $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ canoniquement associé à A. Par conséquent, le plan vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme induit u_F est antisymétrique. Prenant $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de F, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}} u_\mathrm{F}$ est dans $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ et est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec α réel. Ainsi, notant $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la famille $\mathscr{B}$ est par construction une base orthonormée de E. Quitte à échanger ε_1 par $-\varepsilon_1$, on peut la supposer directe et on a $\mathrm{mat}_\mathscr{B} u = \mathrm{U}(\alpha)$. Ainsi, d'après les formules de changement de bases, comme $\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}^{-1}$, la matrice P étant orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{U}(\alpha) \text{ avec } \alpha \text{ réel.}}$$

2. Soit X solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Si $\alpha = 0$, alors $\mathrm{A} = 0$ d'où X constante. La courbe paramétrée par $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ est donc réduite à un point. Supposons $\alpha \neq 0$. On pose $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^\top \mathrm{X}(t)$ pour tout t réel. On a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{U}(\alpha)\mathrm{Y}$$

Ainsi $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Y}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha) t}\mathrm{Y}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)}\mathrm{Y}_0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Y}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Un calcul par bloc donne

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)} = \exp\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{U}(\alpha t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{e}^0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{R}(\alpha t) \end{array}\right)$$

matrice de rotation d'angle α. Ainsi, la courbe paramétrée par $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{U}(\alpha t)}\mathrm{Y}_0$ est l'ensemble des points obtenus par rotation d'angle αt de Y_0 autour de l'axe $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1)$. Il s'agit donc d'un cercle dans l'espace E. La transformation $\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{PY}$ étant isométrique, on conclut

$$\boxed{\text{Les courbes paramétrées solutions de } \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \text{ sont des cercles de l'espace E.}}$$

Remarque : Le cas $\alpha = 0$ donne aussi un cercle mais dégénéré, de rayon nul.

Exercice 2 (***)

Soit n entier non nul et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $\operatorname{Ker} \mathrm{N}$ et $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$.

Corrigé : On a clairement $\operatorname{Ker} \mathrm{N} \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$. En effet, pour $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker} \mathrm{N}$, on a $\mathrm{N}^k\mathrm{X} = 0$ d'où, par continuité du produit matriciel

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)\mathrm{X} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{N}^k}{k!}\right)\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathrm{N}^k\mathrm{X} = 0$$

Cette égalité a lieu indépendamment de l'hypothèse de nilpotence. Puis, comme l'indice de nilpotence de N est majoré par n, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)\mathrm{N}$$

On dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{NP} = \mathrm{T}$ triangulaire supérieure stricte. Puis, on a

$$\mathrm{P}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)\mathrm{P} = \mathrm{I}_n + \mathrm{T}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}' = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\mathrm{T}^{k-1}}{k!} \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

On en déduit l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{T}'$ et donc de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}$ d'où

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{N}$$

Ainsi $$\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n) \subset \operatorname{Ker} \mathrm{N}$$

On conclut $$\boxed{\operatorname{Ker} \mathrm{N} = \operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)}$$

Remarques : (a) Sur la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!} = \mathrm{I}_n + \mathrm{N}'$ avec $\displaystyle\mathrm{N}' = \mathrm{N}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{\mathrm{N}^{k-2}}{k!}$, on peut aussi observer que N' est nilpotente puisque par commutation, on a $\mathrm{N}'^n = \mathrm{N}^n(\ldots)^n = 0$. Avec l'identité de Bernoulli, on a

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^n - (-\mathrm{N}')^n = (\mathrm{I}_n + \mathrm{N}')\sum_{k=0}^{n-1}(-\mathrm{N}')^{n-1-k}$$

d'où l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{N}'$ sans passer par un argument de réduction.

(b) On pouvait s'épargner le détail de la première inclusion puisqu'on a par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)\mathrm{N} = \mathrm{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{N}^{k-1}}{k!}\right)$$

qui implique $\operatorname{Ker} \mathrm{N} \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n) \subset \operatorname{Im} \mathrm{N}$. Avec l'hypothèse de nilpotence, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n = \mathrm{N}(\mathrm{I}_n + \mathrm{N}')$ d'où $\mathrm{N} = (\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_n + \mathrm{N}')^{-1}$ ce qui prouve $\operatorname{Im} \mathrm{N} \subset \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{N}} - \mathrm{I}_n)$ et donc l'égalité des images et aussi des noyaux pour raison de dimension.

Variante : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à N. Les endomorphismes $\mathrm{e}^f - \mathrm{id}$ et f commutent d'où la stabilité de $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^f - \mathrm{id})$. On note $\widetilde{f}$ l'induit par f sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^f - \mathrm{id})$. On a $\widetilde{f}$ nilpotent et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ annulateur de $\widetilde{f}$. Notant r son ordre de nilpotence, il s'ensuit que $\pi_{\widetilde{f}} = \mathrm{X}^r$ divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ d'où $r = 1$ et par conséquent $\widetilde{f} = 0$ ce qui prouve $\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^f - \mathrm{id}) \subset \operatorname{Ker} f$.

Exercice 3 (***)

Montrer que l'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser le fait que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

Corrigé : On utilisera le résultat classique de diagonalisation simultanée : des matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables pour une même matrice de passage. Considérons A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et telles que $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$. Si A et B sont diagonales, le résultat est immédiat par injectivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\forall (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \exp\left[\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)\right] = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{d_1}, \ldots, \mathrm{e}^{d_n})$$

Dans le cas général, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a la propriété

$$\mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{B}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Pe}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^{-1}$$

Quitte à réordonner les valeurs propres de B, notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de B avec $p \leqslant n$ et notons $\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathrm{L}_i$ avec les L_i polynômes de Lagrange définis par

$$\forall i \in [\![1\,;\,d]\!] \qquad \mathrm{L}_i = \prod_{j \in [\![1\,;\,d]\!] \smallsetminus \{i\}} \frac{\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\lambda_j}}{\mathrm{e}^{\lambda_i} - \mathrm{e}^{\lambda_j}}$$

Par construction de Q, on a

$$\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{D}}) = \mathrm{D} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}}) = \mathrm{PQ}(\mathrm{e}^{\mathrm{D}})\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{B}$$

Comme A commute avec $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ et comme $\mathrm{B} = \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}})$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il s'ensuit que A commute avec B. Ainsi, il existe $\mathrm{R} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que RAR^{-1} et RBR^{-1} soient diagonales. Par suite

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re}^{\mathrm{A}}\mathrm{R}^{-1} = \exp(\mathrm{RAR}^{-1}) = \exp(\mathrm{RBR}^{-1}) = \mathrm{Re}^{\mathrm{B}}\mathrm{R}^{-1}$$

ce qui nous ramène au cas de deux matrices diagonales d'où le résultat. Ainsi

$$\boxed{\text{L'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Variante : On peut éviter le recours au résultat de diagonalisation simultanée. Le polynôme Q précédemment construit l'est uniquement à partir du spectre de e^{B} puisqu'en posant $\mu_i = \mathrm{e}^{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$,

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{p} \ln(\mu_i)\mathrm{L}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{B}}) = \{\mu_i, i \in [\![1\,;\,p]\!]\}$$

et on a montré $\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}}) = \mathrm{B}$. Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ qui ont donc même spectre, pour les mêmes raisons, on trouve $\mathrm{A} = \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}})$ et l'égalité $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ s'ensuit.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ muni d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{I}_p + \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et $(\mathrm{A}_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{A}$. Établir

$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$

3. Montrer $\qquad \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad (\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$

Corrigé : 1. Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on peut écrire

$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec $\qquad \forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad f_k(n) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}\mathrm{A}^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\dfrac{\mathrm{A}^k}{k!}$

On a

$$\forall (k,n)^2 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\mathrm{A}^k}{k!}$

et comme l'espace E est muni d'une norme sous-multiplicative, on obtient par récurrence immédiate

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \|f_k(n)\| \leqslant \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!}$$

Par convergence normale et donc uniforme de la série $\sum f_k$, il vient par double limite

$$\boxed{\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}}$$

Remarque : On majore $\|f_k(n)\|$ pour k entier non nul car on ne sait pas *a priori* si $\|\mathrm{I}_n\| \leqslant 1$. L'inégalité a lieu pour une norme subordonnée mais pas pour la norme $\|\cdot\|_1$ par exemple.

Variantes : (a) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Comme l'espace E est muni d'une norme sous-multiplicative, on a $\|\mathrm{A}^k\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^k$ pour tout entier k non nul. Puis, pour n entier non nul

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}\right]\frac{\mathrm{A}^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

On peut faire démarrer la première somme en $k = 1$ puisque le premier terme est nul. Par ailleurs, on observe l'inégalité

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{n \times n \times \ldots \times n} \leqslant 1$$

Par suite $\qquad \left\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\right\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}\right]\frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!}$

Autrement dit $\qquad \left\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\right\| \leqslant \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|} - \left(1 + \dfrac{\|\mathrm{A}\|}{n}\right)^n \qquad (*)$

Par encadrement $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{I}_p + \dfrac{\mathrm{A}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$

(b) On munit E d'une norme sous-multiplicative vérifiant $\|\mathrm{I}_p\| = 1$ (par exemple, une norme d'opérateur). Pour n entier non nul, on a $\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$ par propriété fondamentale de l'exponentielle puis par factorisation de Bernoulli car commutation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}}\right)^n - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}} - \mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{A}}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}}\right)^k\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^{n-1-k}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire et en utilisant le caractère sous-multiplicatif, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\| &\leqslant \|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}} - \mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{A}}{n}\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|}{n}}\right)^k\left(1 + \frac{\|\mathrm{A}\|}{n}\right)^{n-1-k} \\
&\leqslant \|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{n}} - \mathrm{I}_p - \frac{\mathrm{A}}{n}\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|}{n}}\right)^k\left(\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|}{n}}\right)^{n-1-k} \\
\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n\| &\leqslant n\mathrm{e}^{\frac{\|\mathrm{A}\|(n-1)}{n}}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|\mathrm{A}\|^k}{n^k k!} \leqslant n\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|\mathrm{A}\|^k}{n^2 k!} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2\|\mathrm{A}\|}}{n}
\end{aligned}$$

Le résultat suit.

2. Comme précédemment, on écrit

$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(n) \quad \text{avec} \quad \forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad g_k(n) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\mathrm{A}_n^k$$

On a
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad g_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

et
$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \|g_k(n)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}^k}{k!} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \|\mathrm{A}_n\|$$

Par convergence normale et donc uniforme de la série $\sum g_k$, il vient par double limite

$$\boxed{\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{k!} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}}$$

Variantes : (a) En appliquant $(*)$ à A_n, on obtient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par ailleurs, on sait que l'exponentielle est continue. Par suite

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{A}} - \mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} + \mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

C'est-à-dire
$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$

(b) On peut aussi reprendre le résultat de la deuxième variante de la première question qui donne pour n entier non nul

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}_n} - \left(\mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}_n}{n}\right)^n\| \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}_n\|}}{n}$$

et on conclut comme précédemment.

3. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On a
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n} + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{n^k k!}$$

Par inégalité triangulaire généralisée, la convergence absolue ayant lieu, il vient
$$\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{n^k k!}\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|\mathrm{A}\|^k}{n^k k!} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|\mathrm{A}\|^k}{k!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{A}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{B}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{\mathrm{B}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où
$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n} = \mathrm{I}_p + \frac{1}{n}\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{o}(1)\right)$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut
$$\boxed{\forall(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}/n}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}}$$

Remarque : Ce dernier résultat est connu sous le nom de *formule du produit de Lie*. On peut souligner le fait que le résultat a lieu pour tout couple de matrices (A,B) dans E, même si A et B ne commutent pas.

Exercice 5 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer
$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{e}^\mathrm{A} \text{ diagonalisable}$$

L'équivalence a-t-elle lieu sans l'hypothèse χ_A scindé ?

Corrigé : Supposons A diagonalisable. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonalisable telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ puis, par continuité du produit matriciel, il vient $\mathrm{e}^\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{e}^\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1}$ avec e^D diagonale d'où le sens direct. Supposons e^A diagonalisable. Comme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable donc il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{m_1}, \ldots \lambda_r\mathrm{I}_{m_r})$ et $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r)$ avec les T_i triangulaires supérieures strictes telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$ ce qui équivaut à $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{N}$ avec $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{N} = \mathrm{PTP}^{-1}$. On a B diagonalisable, N nilpotente et un produit par blocs montre que $\mathrm{BN} = \mathrm{NB}$. Par propriété de l'exponentielle matricielle, il vient $\mathrm{e}^\mathrm{A} = \mathrm{e}^\mathrm{B}\mathrm{e}^\mathrm{N}$ d'où $\mathrm{e}^\mathrm{N} = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}}\mathrm{e}^\mathrm{A}$. On vérifie sans difficulté que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ et par conséquent
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{B}}\mathrm{e}^\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}+\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}-\mathrm{B}} = \mathrm{e}^\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{B}}$$

D'après un résultat classique de réduction, des matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables et par conséquent, leur produit est diagonalisable. On en déduit que e^N est diagonalisable. Par ailleurs, on a
$$\mathrm{e}^\mathrm{N} = \mathrm{I}_n + \mathrm{NQ}(\mathrm{N}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}$$

Les matrices N et $\mathrm{Q}(\mathrm{N})$ commutent et il en résulte que $\mathrm{NQ}(\mathrm{N})$ est nilpotente donc semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Il s'ensuit $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^\mathrm{N}\right) = \{1\}$ d'où e^N semblable à I_n donc égale à I_n et par suite $\mathrm{NQ}(\mathrm{N}) = 0$. Le polynôme $\mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}$ est annulateur de N est on sait que $\pi_\mathrm{N} = \mathrm{X}^d$ avec d entier non nul. Comme π_N divise Q, il en résulte que $d = 1$ d'où $\mathrm{N} = 0$ ce qui prouve $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$. On conclut
$$\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{e}^\mathrm{A} \text{ diagonalisable}}$$

Variante : On peut éviter le recours au polynôme minimal. On observe $\mathrm{Q}(\mathrm{N}) = \mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ avec M nilpotente puis, d'après l'identité de Bernoulli

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - (-\mathrm{M})^n = (\mathrm{I}_n + \mathrm{M})\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^{n-1-k}$$

ce qui prouve l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{M}$ et comme $\mathrm{N}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}) = 0$, on trouve $\mathrm{N} = 0$.

Le résultat est faux sans l'hypothèse χ_A scindé : pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{e}^\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$ qui est diagonale et A ne l'est pas puisque χ_A n'est pas scindé.

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \tag{H}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour avoir

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{S_H} \qquad \mathrm{X}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

Corrigé : On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ qui est sous-multiplicative et vérifie $\|\mathrm{MX}\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}\|_1\|\mathrm{X}\|_1$ pour $(\mathrm{M}, \mathrm{X}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0$ pour tout t réel avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{X}_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{AX}_0 = \lambda\mathrm{X}_0$. Par continuité du produit matriciel, on a

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k\mathrm{A}^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k\lambda^k\mathrm{X}_0}{k!}\right) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(t\lambda)^k}{k!}\right)\mathrm{X}_0 = \mathrm{e}^{t\lambda}\mathrm{X}_0$$

Comme une des composantes de X_0 est non nulle, on obtient

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}_0 \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{t\lambda} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

Comme $\left|\mathrm{e}^{t\lambda}\right| = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}$ pour t réel, il s'ensuit que $\mathrm{Re}\,(\lambda) \leqslant 0$. La matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\lambda\mathrm{I}_m + \mathrm{N}$ où N est triangulaire supérieure stricte. Un calcul par blocs montre que $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ est semblable à la matrice formée des blocs $\mathrm{e}^{\lambda t\mathrm{I}_m + t\mathrm{N}} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}$ par commutation. On se contente d'étudier le cas d'un bloc, le cas général s'en déduisant puisque si $\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\mathrm{P}^{-1}$, on a

$$\|\mathrm{A}\|_1 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1\|\,\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\|_1\|\mathrm{P}^{-1}\|_1$$

et

$$\|\,\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}\|_1 = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \|\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda\|_1$$

Supposons $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$. Pour une solution $\mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{X}_0$ avec X_0 matrice colonne, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|\mathrm{X}(t)\|_1 = \|\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\mathrm{X}_0\|_1 \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\|\mathrm{e}^{t\mathrm{N}}\|_1\|\mathrm{X}_0\|_1$$

et $\mathrm{e}^{t\mathrm{N}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k\mathrm{N}^k}{k!}$ pour t réel puisque l'indice de nilpotence est majoré par m. Ainsi, par croissances comparées, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \|\mathrm{X}(t)\|_1 \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k\|\mathrm{N}\|_1^k}{k!}\right)\|\mathrm{X}_0\|_1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

d'où le caractère borné.

Supposons $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$, autrement dit $\lambda = \mathrm{i}\theta$ avec θ réel. Soit p l'indice de nilpotence de N. On a $p \geqslant 1$. Supposons $p \geqslant 2$. On dispose de X_0 matrice colonne telle que $\mathrm{N}^{p-1}\mathrm{X}_0 \neq 0$. On vérifie sans difficulté que $(\mathrm{N}^{p-2}\mathrm{X}_0, \mathrm{N}^{p-1}\mathrm{X}_0)$ est libre. On trouve

$$e^{\lambda t}e^{tN}N^{p-2}X_0 = e^{it\theta}(N^{p-2}X_0 + tN^{p-1}X_0)$$

La composante portée par $N^{p-1}X_0$ est non bornée et par conséquent, pour une solution bornée, si $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$, alors l'indice de nilpotence p est égal à 1, autrement dit $N = 0$ ce qui prouve que le bloc en question est diagonalisable. La réciproque ne pose pas de difficulté. On conclut

> Les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, on a $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant diagonalisable.

Exercice 7 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les solutions de l'équation

$$X' = AX \tag{H}$$

Pour $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $t \mapsto \Phi(t, X_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Les solutions de (H) sont dites *stables* s'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \forall (X_0, X_1) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \qquad \|\Phi(t, X_0) - \Phi(t, X_1)\| \leqslant C\|X_1 - X_0\|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que les solutions de (H) soient stables.

Corrigé : Dans tout ce qui suit, la norme considérée est la norme $\|\cdot\|_1$. On a

$$\forall (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \Phi(t, X_0) = e^{tA}X_0$$

Ainsi, pour $(X_1, X_0) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \Phi(t, X_0) - \Phi(t, X_1) = e^{tA}(X_0 - X_1)$$

d'où
$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\Phi(t, X_0) - \Phi(t, X_1)\| \leqslant \|e^{tA}\|\|X_0 - X_1\|$$

Montrons l'équivalence

$$\|e^{tA}\| \underset{t\to+\infty}{=} O(1) \iff \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \|e^{tA}Y\| \underset{t\to+\infty}{=} O(1) \tag{$*$}$$

Le sens direct est immédiate puisque pour $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\|e^{tA}Y\| \leqslant \|e^{tA}\|\|Y\|$. Réciproquement, notant $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ avec $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il vient par inégalité triangulaire

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|e^{tA}Y\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,\|e^{tA}e_i\|$$

On dispose de $M \geqslant 0$ tel que $\|e^{tA}e_i\| \leqslant M$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et tout $t \geqslant 0$. Il vient

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|e^{tA}Y\| \leqslant M\sum_{i=1}^{n} |y_i| = M\|Y\|$$

d'où le sens indirect. On a établi dans l'exercice 6 feuille 71 le résultat suivant :

Les solutions de (H) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, on a $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant diagonalisable.

Avec l'équivalence $(*)$, on conclut

> Les solutions de (H) sont stables sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, on a $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$ ou $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 0$ et le bloc correspondant diagonalisable.