ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 13/02/2025

Corrigé du devoir en temps libre n°14

Problème I

Supposons qu'il existe une solution x de (H) développable en série entière sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$ avec $\mathrm{R}>0$. Par dérivation de séries entières, il vient pour $t\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\qquad x'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}\qquad x''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$$

On injecte dans (H) :

$$\forall t\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[\qquad \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-1}+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}4a_nt^{n+3}=0$$

Avec un changement d'indice dans la dernière somme, il vient pour $t\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-1}+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=4}^{+\infty}4a_{n-4}t^{n-1}=0$$

Puis on isole les premiers termes et on rassemble par linéarité

$$\forall t\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[\qquad 3a_1+8a_2t+15a_3t^2+\sum_{n=4}^{+\infty}\left[n(n+2)a_n+4a_{n-4}\right]t^{n-1}=0$$

Par unicité du développement en série entière sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$, on trouve

$$a_1=a_2=a_3=0\qquad \forall n\geqslant 4\qquad n(n+2)a_n+4a_{n-4}=0$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad a_{4n+1}=a_{4n+2}=a_{4n+3}=0\quad\text{et}\quad a_0\neq 0\Longrightarrow a_{4n}\neq 0$$

Pour obtenir une expression simple de a_{4n}, on écrit un produit téléscopique

$$a_{4n}=a_0\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{a_{4k}}{a_{4(k-1)}}\right]=a_0\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{-1}{2k(2k+1)}\right]=a_0\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Pour $r>0$, notant $u_n=\dfrac{r^{4n}}{(2n+1)!}$, il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{r^4}{(2n+2)(2n+3)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit la convergence absolue de $\sum u_n$ pour tout $r>0$ d'où $\mathrm{R}=+\infty$. Pour t réel, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{4n}t^{4n}=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{4n}}{(2n+1)!}$$

On pose $$\forall t\in\mathbb{R}\qquad \varphi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(t^2)^{2n}}{(2n+1)!}$$

En multipliant par t^2, on identifie

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad t^2\varphi(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin(t^2)$$

d'où $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, on a établi

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (H) développables en série entière est } \mathrm{Vect}\,(\varphi).}$$

Sur $\mathrm{I} =]\,0\,; \sqrt{\pi}\,[$, l'équation (H) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux résolue. L'ensemble $\mathrm{S_H}$ est donc un plan vectoriel. Si ψ est une solution de (H) sur I, considérant le wronskien W de (φ, ψ), on a

$$\varphi\psi' - \varphi'\psi = \mathrm{W} \tag{L}$$

On sait que le wronskien vérifie l'équation différentielle $\mathrm{W}' = -\dfrac{3}{t}\mathrm{W}$ d'où

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{W}(t) = \frac{\beta}{t^3} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

On peut désormais considérer l'équation (L) comme une équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre. La droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(\varphi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et par variation de la constante, avec λ dérivable sur I et $\psi = \lambda\varphi$, il vient pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$\varphi^2(t)\lambda'(t) = \frac{\beta}{t^3} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

d'où $$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \lambda(t) = \beta \int \frac{t}{\sin^2(t^2)}\,\mathrm{d}t + \alpha = -\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cotan}\,(t^2) + \alpha$$

avec α, β réels. Notant $a = \alpha$ et $b = -\beta/2$, on conclut

$$x \in \mathrm{S_H} \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \lambda(t)\varphi(t) = a\frac{\sin(t^2)}{t^2} + b\frac{\cos(t^2)}{t^2}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S_H} = \left\{ t \in \mathrm{I} \mapsto a\frac{\sin(t^2)}{t^2} + b\frac{\cos(t^2)}{t^2}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Remarque : On peut aussi procéder avec la méthode de Lagrange ou même conjecturer la forme des solutions manquantes puis la vérifier.

Problème II

1. On se place dans $\mathbb{C}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{D} + \mathrm{T}$. Il s'ensuit

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{M}}\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}) + \mathrm{Q}$$

avec Q triangulaire supérieure stricte. Par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{e}^{\mathrm{M}}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}}$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On a $\qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\right)^{-1}$

d'où l'orthogonalité de e^{A}. Comme les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls

$$\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Par conséquent $\boxed{\exp(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})}$

3. Soit θ réel. On observe $\mathrm{A}(\theta) = \theta\mathrm{R}(\pi/2)$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}(\theta)^k = \theta^k \mathrm{R}(k\pi/2)$$

d'où $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{A}(\theta)} = \begin{pmatrix} c(\theta) & -s(\theta) \\ s(\theta) & c(\theta) \end{pmatrix} \quad$ avec $\quad c(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\theta^k}{k!} \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) \qquad s(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\theta^k}{k!} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$

Avec des considérations trigonométriques, on remarque $c(\theta) = \cos(\theta)$, $s(\theta) = \sin(\theta)$ et on conclut

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{A}(\theta)} = \mathrm{R}(\theta)}$$

4. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top \mathrm{MP} = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, \mathrm{R}(\theta_1), \ldots, \mathrm{R}(\theta_s))$ avec les θ_i réels. Comme $\det \mathrm{M} = 1$, il s'ensuit que q est pair et on peut donc écrire $-\mathrm{I}_q = \mathrm{diag}(\mathrm{R}(\pi), \ldots, \mathrm{R}(\pi))$. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{MP} = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, \mathrm{R}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{R}(\alpha_r))$$

avec les α_i réels. Avec le résultat de la question précédente, il vient

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \exp \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \mathrm{A}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{A}(\alpha_r))\mathrm{P}^\top = \exp\left(\mathrm{P}\, \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \mathrm{A}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{A}(\alpha_r))\mathrm{P}^\top\right)$$

On conclut $\boxed{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \exp(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))}$

Problème III

1. La famille $(\cos, \sin)$ est clairement un système fondamental de solutions de l'équation homogène (H) associée à l'équation (L). On procède ensuite par variation des constantes. On cherche λ, μ dérivables de $[\,0\,;+\infty\,[$ dans $\mathbb{R}$, solutions pour tout $t \geqslant 0$ de

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

d'où $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad \lambda(t) = \alpha - \displaystyle\int_0^t \sin(s) f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \mu(t) = \beta + \int_0^t \cos(s) f(s)\,\mathrm{d}s$

avec α, β réels. Les solutions de (L) sont décrites par

$$\forall t \geqslant 0 \qquad x(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + \int_0^t \left[\sin(t)\cos(s) - \sin(s)\cos(t)\right] f(s)\mathrm{d}s$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{S_L} = \left\{ t \geqslant 0 \mapsto \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + \displaystyle\int_0^t \sin(t-s) f(s)\,\mathrm{d}s,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

2. Par monotonie de f, sa dérivée f' est de signe constant. Sans perte de généralité, on peut la supposer positive. On a

$$\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = f(t) - f(0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell - f(0)$$

ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(s)\,\mathrm{d}s$. Avec les inégalité

$$\forall s \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant |\sin(s)f'(s)| \leqslant f'(s) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\cos(s)f'(s)| \leqslant f'(s)$$

on conclut par comparaison

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{+\infty} \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s \text{ et } \int_0^{+\infty} \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s \text{ convergent absolument.}}$$

3. On a $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$. Par intégration par partie, les fonctions sin et cos étant de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \cos(s)f(s)\,\mathrm{d}s = \underbrace{[\sin(s)f(s)]_0^t}_{=\mathrm{O}(1)} - \underbrace{\int_0^t \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s}_{=\mathrm{O}(1)} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

et de même
$$\int_0^t \sin(s)f(s)\,\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

Pour x solution de (L), on dispose de α, β réels tels que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad x(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + \sin(t)\int_0^t \cos(s)f(s)\,\mathrm{d}s - \cos(t)\int_0^t \sin(s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

Toutes les quantités qui interviennent dans l'expression de $x(t)$ pour $t \geqslant 0$ sont bornées. Par conséquent

$$\boxed{\text{Toute solution de (L) est bornée.}}$$

4. Par intégration par parties, on a pour $t \geqslant 0$

$$\int_0^t \cos(s)f(s)\,\mathrm{d}s = \sin(t)f(t) - \int_0^t \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

et
$$\int_0^t \sin(s)f(s)\,\mathrm{d}s = f(0) - \cos(t)f(t) + \int_0^t \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

Soit x solution de (L). On dispose de α, β réels tels que pour $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha\cos(t) + \beta\sin(t) \\ &\quad + \sin(t)\left[\sin(t)f(t) - \int_0^t \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s\right] - \cos(t)\left[f(0) - \cos(t)f(t) + \int_0^t \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s\right] \\ &= f(t) + \cos(t)\left[\alpha - f(0) - \int_0^t \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s\right] + \sin(t)\left[\beta - \int_0^t \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s\right] \end{aligned}$$

Comme les fonctions cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$, si x admet une limite finie en $+\infty$, alors

$$\alpha = f(0) + \int_0^{+\infty} \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \beta = \int_0^{+\infty} \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

La réciproque est vraie puisque

$$\cos(t)\left[\alpha - f(0) - \int_0^t \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s\right] \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)\mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

et de même pour l'autre terme. Ainsi, il existe une unique fonction g solution de (L) ayant une limite finie en $+\infty$ caractérisée par le choix de α et β précédemment décrit. Par relation de Chasles, il vient pour $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) + \cos(t)\int_t^{+\infty} \cos(s)f'(s)\,\mathrm{d}s + \sin(t)\int_t^{+\infty} \sin(s)f'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= f(t) + \int_t^{+\infty} [\cos(t)\cos(s)+\sin(t)\sin(s)]\,f'(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'unique solution bornée de (L) est } g \text{ avec} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = f(t) + \int_t^{+\infty} \cos(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s.}$$

Problème IV

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^\top$. Il s'ensuit

$$\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})\mathrm{P}^\top$$

ce qui prouve que la matrice e^{M} est symétrique réelle avec des valeurs propres dans $]\,0\,; +\infty\,[$.

Ainsi $\boxed{\exp(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

Remarque : D'autres approches sont possibles. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{M}}\right)^\top = \mathrm{e}^{\mathrm{M}^\top} = \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$ puis, pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{X} \neq 0$, en utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle qui permet d'écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{M}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{M}}{2}}\right)^2$, il vient

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{e}^{\mathrm{M}}\mathrm{X} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{M}}{2}}\mathrm{X}\right)^\top \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{M}}{2}}\mathrm{X} = \|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{M}}{2}}\mathrm{X}\|^2 > 0$$

le caractère strict résultant du fait que $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{M}}{2}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On retrouve le résultat attendu.

2. Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i > 0$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^\top$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\ln(\lambda_1), \ldots, \ln(\lambda_n))$ et $\mathrm{A} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$. Il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{P}\mathrm{e}^{\Delta}\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\ln(\lambda_1)}, \ldots, \mathrm{e}^{\ln(\lambda_n)})\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathrm{P}^\top = \mathrm{B}$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } \exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est surjective.}}$

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\top$. On note $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\} = \left\{\mathrm{e}^{\lambda_i}, i \in [\![1\,; n]\!]\right\}$ avec les μ_i deux à deux distincts et on pose $\mathrm{Q} = \sum\limits_{i=1}^{p} \ln(\mu_i)\mathrm{L}_i$ avec $(\mathrm{L}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\lambda}) = \lambda$ d'où

$$\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{Q}\left(\mathrm{P}\mathrm{e}^{\mathrm{D}}\mathrm{P}^\top\right) = \mathrm{PQ}\left(\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})\right)\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathrm{P}^\top = \mathrm{A}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \text{ il existe } \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ qui ne dépend que de } \mathrm{Sp}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) \text{ tel que } \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{A}.}$$

Soient A, B dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}$. D'après le résultat préliminaire, il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui ne dépend que du spectre de e^{A} tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}})$. Le résultat vaut aussi pour B pour les mêmes raisons puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}$ d'où

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{B}}) = \mathrm{B}$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } \exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est injective.}}$

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n)$ base orthonormée de vecteurs colonnes propres associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathrm{V}_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec les x_i coordonnées de X dans $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n)$, il vient avec le théorème de Pythagore

$$\|\mathrm{AX}\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mathrm{V}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \rho(\mathrm{A})^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho(\mathrm{A})^2 \|\mathrm{X}\|^2$$

d'où
$$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}} = \operatorname*{Sup}_{\mathrm{X} \in \mathrm{S}(0,1)} \|\mathrm{AX}\| \leqslant \rho(\mathrm{A})$$

On note $i_0 \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \rho(\mathrm{A})$. On obtient

$$\|\mathrm{AX}_{i_0}\| = \|\lambda_{i_0} \mathrm{V}_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}| = \rho(\mathrm{A})$$

On conclut
$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \qquad \rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}}$$

5.(a) Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Sans difficulté, on vérifie que la matrice M est inversible avec $\mathrm{M}^{-1} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Après réduction, on a clairement $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}^{-1}) = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})\}$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$, on a

$$|\lambda| \leqslant \rho(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad |\lambda^{-1}| \leqslant \rho(\mathrm{M}^{-1})$$

d'où
$$\rho(\mathrm{M}^{-1})^{-1} \leqslant |\lambda| \leqslant \rho(\mathrm{M})$$

On a $\mathrm{B}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{B}$ d'où par continuité de $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$

$$\rho(\mathrm{B}_k) = \|\mathrm{B}_k\|_{\mathrm{op}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|\mathrm{B}\|_{\mathrm{op}} = \rho(\mathrm{B}) > 0$$

On dispose de p entier tel que $\rho(\mathrm{B}_k) \leqslant 2\rho(\mathrm{B})$ pour $k > p$ et $\rho(\mathrm{B}_k) \leqslant \operatorname*{Max}_{i \in [\![0\,; p]\!]} \rho(\mathrm{B}_i)$ pour $k \leqslant p$. Ainsi, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \rho(\mathrm{B}_k) \leqslant \beta$$

L'inverse matricielle est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puisqu'elle peut s'écrire $\mathrm{M} \mapsto \dfrac{1}{\det(\mathrm{M})} \mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top$, application à coordonnées rationnelles bien définies. Par conséquent, on a $\mathrm{B}_k^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{B}^{-1} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et le même raisonnement que précédemment permet d'obtenir l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \rho(\mathrm{B}_k^{-1}) \leqslant \alpha$$

Par conséquent, pour k entier et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}_k)$, on a

$$\alpha^{-1} \leqslant \rho(\mathrm{B}_k^{-1})^{-1} \leqslant |\lambda| \leqslant \rho(\mathrm{B}_k) \leqslant \beta$$

On conclut $\boxed{\text{Les spectres des matrices } \mathrm{B}_k \text{ sont dans un compact commun de } \mathbb{R}_+^*.}$

5.(b) D'après la bijectivité établie aux questions 2 et 3, on dispose pour k entier de $\mathrm{A}_k \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ unique telle que $\mathrm{B}_k = \mathrm{e}^{\mathrm{A}_k}$ et de $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ unique telle que $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$. On cherche alors à montrer $\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{A}$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_k)$, on a $\mathrm{e}^{\lambda} \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}_k)$ d'où $\lambda \in [\,-\ln(\alpha)\,; \ln(\beta)\,]$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{A}_k\|_{\mathrm{op}} = \rho(\mathrm{A}_k) \in [\,-\ln(\alpha)\,; \ln(\beta)\,]$$

ce qui prouve que la suite $(\mathrm{A}_k)_k$ est une suite bornée de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour φ une extractrice telle que la suite $\mathrm{A}_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{A}'$ avec $\mathrm{A}' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ par fermeture, il vient par continuité de l'exponentielle

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}_{\varphi(k)}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}'}$$

Par unicité de la limite, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{A}'} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$ et d'après l'injectivité établie à la question 3, on trouve $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$. Autrement dit, la suite $(\mathrm{A}_k)_k$ à valeurs dans le compact K admet la matrice A pour unique valeur d'adhérence ce qui prouve

$$\mathrm{A}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{A}$$

On conclut $\boxed{\text{L'exponentielle réalise un homéomorphisme de } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ vers } \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$

Problème V (bonus)

1. La fonction f admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I. En effet, s'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de zéros de f deux à deux distincts de $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$, on dispose d'une extractrice φ telle que $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,a\,;b\,]$. Par continuité, on a

$$0 = f(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha) = 0$$

Quitte à ré-extraire, on suppose $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour n entier. Par dérivabilité en α, il vient

$$0 = \frac{f(\alpha_{\varphi(n)}) - f(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(\alpha)$$

La fonction f serait alors solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p_1(t)y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

et serait donc la fonction nulle ce qui est faux. Les zéros de f sont donc isolés. Soient α, β deux zéros consécutifs de f. Sans perte de généralité, on peut supposer $f(t) > 0$ pour $t \in \,]\,\alpha\,;\beta\,[$. On a

$$\forall t \in \,]\,\alpha\,;\beta\,[\qquad \frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta} \leqslant 0$$

Faisant tendre $t \to \alpha^+$ dans la première inégalité et $t \to \beta^-$ dans la seconde, il vient

$$f'(\alpha) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(\beta) \leqslant 0$$

Supposons que g ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. Là encore, sans perte de généralité, on peut supposer $g(t) > 0$ pour $t \in \,]\,\alpha\,;\beta\,[$. Par continuité de g sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$, on a $g(t) \geqslant 0$ pour $t \in [\,\alpha\,;\beta\,]$. Puis, on considère $\mathrm{W} = fg' - f'g$. La fonction W est dérivable sur I et par dérivation

$$\mathrm{W}' = f'g' - f'g' + fg'' - f''g = \underbrace{(p_1 - p_2)}_{\leqslant 0} fg$$

On en déduit la décroissance de W sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$. Puis, on observe

$$\mathrm{W}(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{W}(\beta) = -f'(\beta)g(\beta) \geqslant 0$$

Par conséquent, la fonction W est nulle sur le segment $[\,\alpha\,;\beta\,]$ ce qui prouve l'existence d'un réel λ tel que $g(t) = \lambda f(t)$ pour tout $t \in [\,\alpha\,;\beta\,]$. On en déduit que g s'annule en α et β. Sinon, la fonction s'annule sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{Entre deux zéros distincts de } f\text{, il y a au moins un zéro de } g.}$$

2.(a) On a $\mathrm{e}^{|t|} \geqslant 1$ et sin solution de $y'' + y = 0$. D'après le résultat de la première question, toute solution de (H) admet au moins un zéro dans $[\,k\pi\,;(k+1)\pi\,]$ avec k entier relatif et par conséquent

$$\boxed{\text{Toute solution de (H) admet une infinité de zéros.}}$$

2.(b) Soit g solution non nulle de (H) et α, β deux zéros consécutifs de g tels que $\beta - \alpha > \pi$. On choisit θ réel tel que $\alpha < \theta < \theta + \pi < \beta$. La fonction $t \mapsto \sin(t - \theta)$ est non nulle et s'annule en θ et $\theta + \pi$. D'après le résultat de la première question, la fonction g admet un zéro dans le segment $[\,\theta\,;\theta + \pi\,]$ ce qui contredit le choix de α et β. On conclut

$$\boxed{\text{La distance entre deux zéros consécutifs d'une solution non nulle de (H) est } \leqslant \pi.}$$