Devoir en temps libre n°14

Problème I

Chercher les solutions développables en série entière puis résoudre complètement sur $]\,0\,;\sqrt{\pi}\,[$ l'équation différentielle
$$tx'' + 3x' + 4t^3x = 0 \tag{H}$$

Problème II

1. Montrer $$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \det(\mathrm{e}^{\mathrm{M}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}$$
2. Établir $$\exp(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$
3. Pour θ réel, on pose $\mathrm{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{e}^{\mathrm{A}(\theta)}$.
4. En déduire $$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \exp(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$$

Problème III

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. On considère l'équation
$$y'' + y = f \tag{L}$$

1. Déterminer une expression de y solution de (L) en fonction de f.
2. Justifier que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(s) f'(s)\,\mathrm{d}s$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(s) f'(s)\,\mathrm{d}s$ convergent.
3. En déduire que toute solution de (L) est bornée.
4. Montrer qu'il existe une unique solution g de (L) ayant une limite finie en $+\infty$ et déterminer une expression simple de g à l'aide d'une intégrale généralisée.

Problème IV

On se propose d'établir que l'exponentielle réalise un *homéomorphisme* de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, *i.e.* est une application bijective, continue, dont la réciproque est continue.

1. Montrer $$\exp(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$
2. Établir la surjectivité de $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui ne dépend que du spectre $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{A}})$ tel que $\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{A}$. En déduire l'injectivité de $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, établir $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}}$ avec $\rho(\mathrm{A}) = \mathrm{Max}\,\{|\lambda|\,, \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\}$.
   L'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
5. Soit $(\mathrm{B}_k)_k \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{B}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{B}$.
   (a) En considérant les suites $(\rho(\mathrm{B}_k))_k$ et $(\rho(\mathrm{B}_k^{-1}))_k$, justifier que les spectres des matrices B_k sont dans un compact commun de $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Conclure.

Problème V (bonus)

1. Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point, p_1 et p_2 dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ avec $p_2 \geqslant p_1$. On considère les équations différentielles

$$y'' + p_1(t)y = 0 \qquad (\mathrm{H}_1) \qquad\qquad y'' + p_2(t)y = 0 \qquad (\mathrm{H}_2)$$

   Soit $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{H}_1}$ avec f non nulle et $g \in \mathrm{S}_{\mathrm{H}_2}$. Démontrer qu'entre deux zéros distincts consécutifs de f, il y a au moins un zéro de g. On pourra considérer $\mathrm{W} = fg' - f'g$.

2. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + \mathrm{e}^{|t|}y = 0 \qquad (\mathrm{H})$$

   (a) Justifier que toute solution de (H) admet une infinité de zéros.

   (b) Montrer que la distance entre deux zéros consécutifs d'une solution non nulle de (H) est $\leqslant \pi$.