Devoir en temps libre n°15

Problème I

Soit E euclidien et $\mathrm{U} = \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On pose

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U et que pour $x \in \mathrm{U}$, la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est une *similitude*, *i.e.* de la forme αg avec $\alpha \geqslant 0$ et $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. On précisera la nature de la similitude en question.

Problème II

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. Pour $\alpha > 0$, on dit que f est α*-fortement monotone* si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geqslant \alpha \|x - y\|^2$$

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que f est α-fortement monotone si et seulement si

$$\forall (x, h) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{d}f(x) \cdot h, h\rangle \geqslant \alpha \|h\|^2$$

On suppose désormais que f est α-fortement monotone avec $\alpha > 0$.

2. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$, la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est injective puis bijective.
3. Soit $b \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \|f(x) - b\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
   (a) Justifier que g atteint un minimum m sur E.
   (b) Montrer que $g \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}g(a) \cdot h$ pour $(a, h) \in \mathrm{E}^2$.
   (c) Conclure que f est bijective.

Problème III

On pose $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = (x + y)^2 + x^3 + y^3$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminer les points critiques de f.
2. Étudier les extremums de la fonction f. On précisera le caractère local/global/strict. On pourra notamment étudier la fonction $x \mapsto f(x, -x - x^2)$ pour compléter l'examen du critère du deuxième ordre.
3. Justifier que la fonction f admet des extremums globaux sur $\mathrm{B}_f(0, 1)$ puis que ceux-ci sont localisés sur la frontière $\partial \mathrm{B}_f(0, 1)$.
4. Bonus : Déterminer les extremums de f sur $\partial \mathrm{B}_f(0, 1)$.