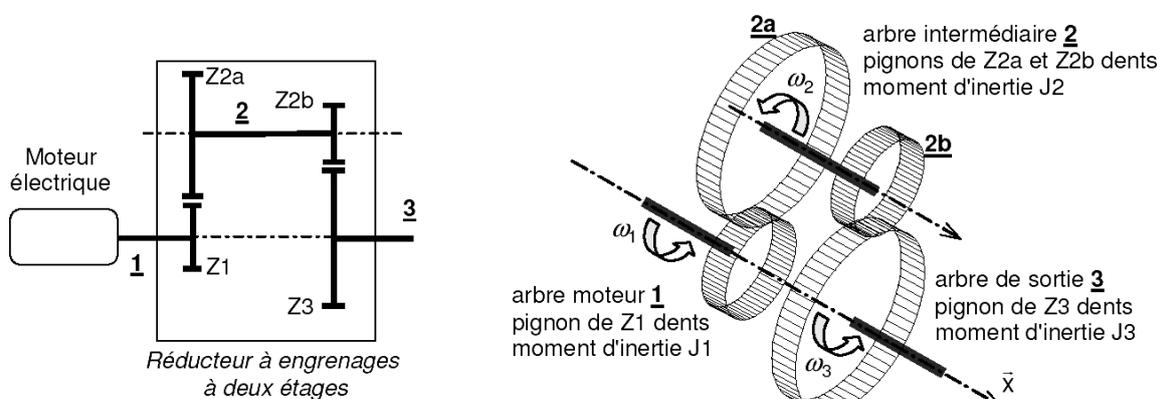


Table des matières

1 Réducteur	1
2 Système d'entraînement en translation	2
3 Cylindre sur plan incliné	4
4 Audi 4Motion - XENS-PSI-2010	6
5 Solides en contact	12
6 Cas d'une liaison pivot glissant parfaite	12
7 Chariot élévateur de bateau - XENS PSI 2012	14

1 Réducteur

On considère un réducteur à engrenages à deux étages comportant un pignon d'entrée moteur **1**, un arbre intermédiaire **2** avec deux pignons de Z_{2a} et Z_{2b} dents et un arbre de sortie **3** avec un pignon de Z_3 dents. Les différents arbres (**1**, **2**, **3**) sont en liaison pivot d'axe \vec{x} par rapport au bâti **0** (non représenté sur la perspective). Les figures ci-dessous illustrent schématiquement le dispositif.



On note :

- λ : le rapport de réduction du 1^{er} engrenage
- μ : le rapport de réduction du 2^e engrenage

Question 1 Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = (1 + 2 + 3)$ par rapport à $\mathbf{0}$.

On sait que : $E_{c(\Sigma/R)} = \sum_{i=1}^n E_{c(S_i/R)}$

Or tous les solides S_i sont en rotation autour d'un axe fixe : $2 E_{c(S_i/R)} = J_i \omega_i^2$

Soit : $2 E_{c(\Sigma/R)} = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2$

On sait que : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\lambda$ et $\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\mu \Rightarrow \omega_2 = -\lambda \omega_1$ et $\omega_3 = -\mu \omega_2 = \mu \lambda \omega_1$

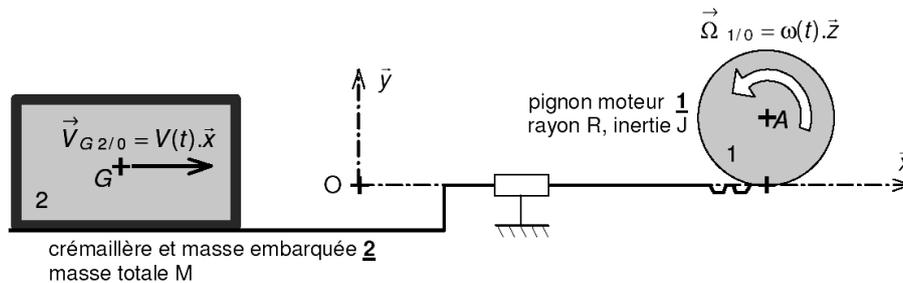
Soit : $E_{c(\Sigma/R)} = \frac{1}{2} (J_1 + \lambda^2 J_2 + \mu^2 \lambda^2 J_3) \omega_1^2$

Question 2 En déduire l'inertie équivalente ramenée à l'axe du moteur.

$E_{c(\Sigma/R)} = \frac{1}{2} \underbrace{(J_1 + \lambda^2 J_2 + \mu^2 \lambda^2 J_3)}_{J_{eq}} \omega_1^2$

2 Système d'entraînement en translation

On considère un dispositif d'entraînement en translation d'une table supportant une charge embarquée (supposée liée à la table **2**). La table est en liaison glissière sans frottement par rapport au bâti $\mathbf{0}$ et en liaison pignon-crémaillère avec le pignon moteur **1**. La figure ci-dessous illustre schématiquement le dispositif.



Question 3 Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = (1 + 2)$ par rapport à $\mathbf{0}$.

$E_{c(\Sigma/0)} = E_{c(1/0)} + E_{c(2/0)}$

2 en translation / $\mathbf{0}$: $E_{c(2/0)} = \frac{1}{2} M v^2$

1 en rotation autour de (A, \vec{z}) : $E_{c(1/0)} = \frac{1}{2} J \omega^2$

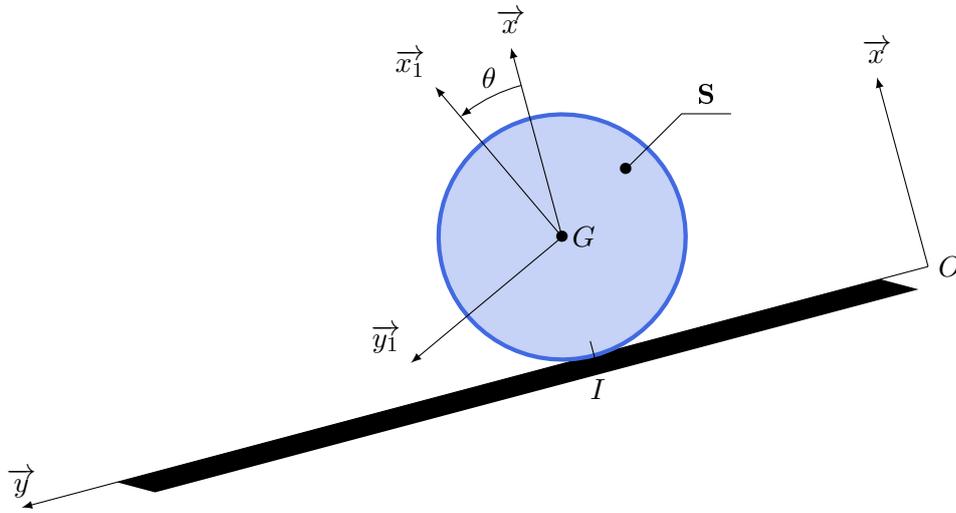
Soit : $E_{c(\Sigma/0)} = \frac{1}{2} (M v^2 + J \omega^2)$ (1)

Question 4 En déduire l'inertie équivalente ramenée à l'axe du moteur.

Pour la transmission pignon-crémaillère : $V = \omega R$ soit en reprenant (1) :

$$E_{c(\Sigma/0)} = \frac{1}{2} \underbrace{(MR^2 + J)}_{J_{eq}} \omega^2$$

3 Cylindre sur plan incliné



Question 1 En utilisant le TEC, déterminer l'accélération angulaire du cylindre

- Rappel du TEC : $\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = P_{\bar{S} \rightarrow S/R}$
- Calcul de $E_{c(S/R)}$: (voir TD précédent) : $E_{c(S/R)} = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$
- Calcul de $P_{\bar{S} \rightarrow S/R}$:
 - ◊ IAME : $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\}$ et $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow S}\}$
 - ◊ Calcul des puissances :
 - $P_{\text{pes} \rightarrow S/R} = \left\{ \begin{matrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{G \in S/R} \end{matrix} \right\}_G = \vec{P} \cdot \vec{V}_{G \in S/R} = -mg \cdot \vec{x}_0 \cdot R\dot{\theta} \cdot \vec{y} = mgR\dot{\theta} \sin \alpha$
 - $P_{\text{sol} \rightarrow S/R} = \left\{ \begin{matrix} R\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow S}\} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{I \in S/R} \end{matrix} \right\}_I = 0$ (Rsg en I : $\vec{V}_{I \in S/R} = \vec{0}$)
- Application du TEC :

$$\frac{dE_{c(S/R)}}{dt} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} \quad \text{d'où :} \quad \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} = mgR\dot{\theta} \sin \alpha \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2g}{3R} \sin \alpha$$

Question 2 Retrouvez ce résultat en appliquant le PFD.

- IAME :
 - ◊ $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{matrix} -mg \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$
 - ◊ $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{matrix} N \cdot \vec{x} - fN \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} N \cdot \vec{x} - fN \cdot \vec{y} \\ RfN \cdot \vec{z} \end{matrix} \right\}_G$
- Torseur dynamique : $\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} mR\ddot{\theta} \cdot \vec{y} \\ \frac{mR^2}{2} \ddot{\theta} \cdot \vec{z} \end{matrix} \right\}_G$
- PFD :
 - ◊ En projetant dans b (problème plan) :
$$\begin{cases} -mg \cos \alpha + N = 0 \\ mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = mR\ddot{\theta} \\ Rfmg \cos \alpha = \frac{mR^2}{2} \ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\diamond \text{ D'où : } f = \frac{mg \sin \alpha - mR\ddot{\theta}}{mg \cos \alpha}$$

$$\diamond \text{ Et : } R(mg \sin \alpha - mR\ddot{\theta}) = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} \Rightarrow Rg \sin \alpha - \frac{3}{2}R^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2g}{3R} \sin \alpha$$

4 Audi 4Motion - XENS-PSI-2010

4.1 Présentation



FIGURE 1 – Audi 4Motion sur un tremplin de ski

Les premières automobiles étaient « propulsées » (roues arrière motrices). L'efficacité de cette transmission est avérée mais le contrôle du véhicule devient délicat dès que le moteur délivre une puissance supérieure à ce que les roues peuvent transmettre à la route. L'implantation du joint de Cardan a fait évoluer rapidement le marché vers des automobiles « tractées » (roues avant motrices). Aujourd'hui, pour des utilisations particulières, les constructeurs ont développé une gamme de véhicules utilitaires (4x4) puis de loisirs (SUV) à transmission intégrale. Ces véhicules ont une excellente motricité mais sont généralement pénalisés par les critères de confort et de consommation. Le groupe VAG (Groupe *Volkswagen Audi*) commercialise une transmission intégrale nommée « 4Motion » développée en partenariat avec l'équipementier suédois *Haldex* dont la particularité est de fonctionner avec les deux roues avant motrices pour le confort, la sécurité et la consommation ou avec quatre roues motrices pour atteindre la performance d'accélération attendue.

— Objectif —

L'objectif de l'étude est de valider la capacité du moteur à satisfaire les exigences d'accélération et de surconsommation du cahier des charges : la puissance du moteur permet-elle un démarrage en pente sur une route enneigée ?

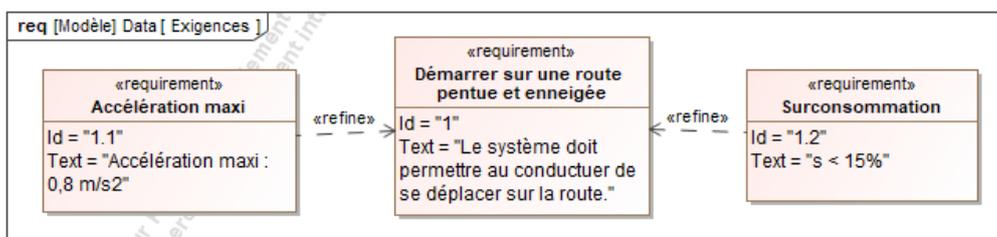


FIGURE 2 – Diagrammes des exigences partiel

Les caractéristiques nécessaires à la validation de ces exigences sont données dans la FIGURE 3.

Nom	Critère	Valeur
Voiture (équipée du 4Motion)	Masse	$M = 1580 \text{ kg}$
	Puissance maxi	105 kW
	Diamètre des roues	620 mm
Route	Pente	10°
	Facteur de frottement avec les roues	$f = 0,35$

FIGURE 3 – Caractérisation partielle des éléments du milieu extérieur

4.2 Modéliser le système

Pour cette étude, on utilisera le modèle plan de la FIGURE 4, le véhicule se déplaçant en ligne droite en montée.

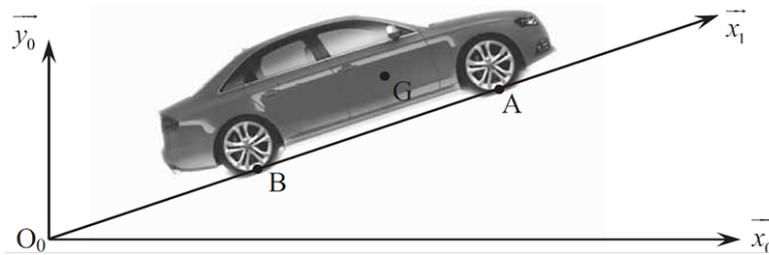


FIGURE 4 – Paramétrage de la voiture dans la côte

Notations

- G : centre de gravité de la voiture, $\overrightarrow{O_0G} = \lambda(t) \cdot \vec{x}_1 + c \cdot \vec{y}_1$ ($c = 940 \text{ mm}$) ;
- A : point de contact entre la roue avant et la route, $\overrightarrow{AG} \cdot \vec{x}_1 = -a$ ($a = 800 \text{ mm}$) ;
- B : point de contact entre la roue arrière et la route, $\overrightarrow{BG} \cdot \vec{x}_1 = b$ ($b = 1630 \text{ mm}$) ;
- R : rayon des roues ;
- $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère lié la route, supposé galiléen ;
- $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$: angle d'inclinaison de la route, supposé constant ;
- $\overrightarrow{A_{\text{route} \rightarrow \text{roues avant}}} = T_A \cdot \vec{x}_1 + N_A \cdot \vec{y}_1$: l'action de la route sur les deux roues avant (en A) ;
- $\overrightarrow{B_{\text{route} \rightarrow \text{roues arrière}}} = T_B \cdot \vec{x}_1 + N_B \cdot \vec{y}_1$: l'action de la route sur les deux roues arrière (en B) ;
- ω : vitesse de rotation des roues par rapport au châssis (on considérera dans tout l'exercice qu'il y a non-glissement de toutes les roues sur le sol).

La transmission de la voiture peut être modélisée par le schéma de la FIGURE 5. On se place dans le cas où le système Haldex solidarise l'arbre de transmission avec le pignon qui entraîne les roues arrière.

On utilise les notations suivantes :

- ω_i : vitesse de rotation des arbres de la transmission en sortie de boîte jusqu'aux roues avec $i \in [1, 2, 3, 4, \text{avg}, \text{avd}, \text{arg}, \text{ard}]$;
- C_1 : couple moteur en sortie de boîte de vitesse transmis à la pièce 1 ;
- m_r : masse des roues et leur axe, $J_r = 1,4 \text{ kg.m}^2$: moment d'inertie des roues avant ou arrière par rapport à leur axe de rotation ;

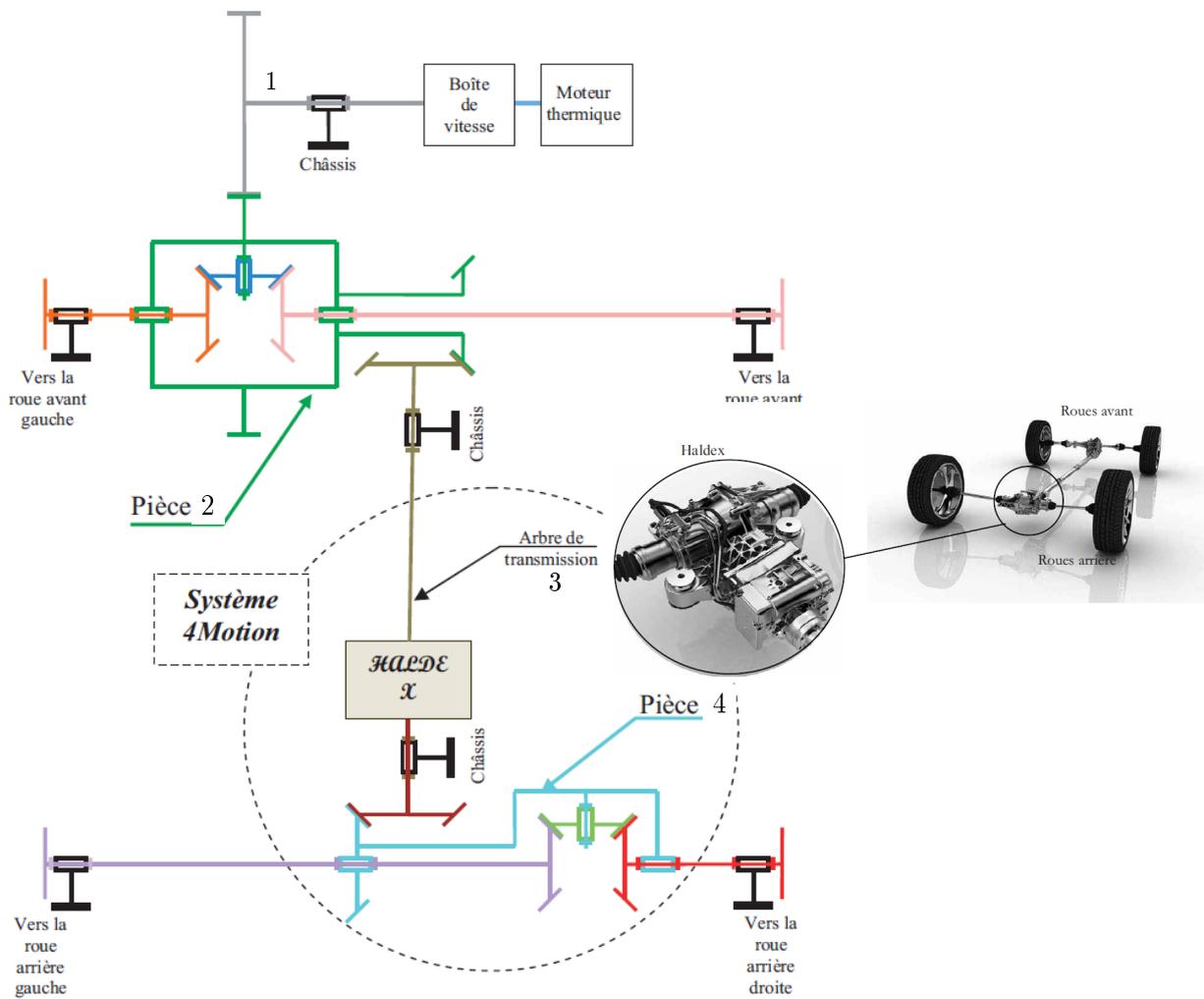


FIGURE 5 – Schéma de la transmission

- m_1, m_2, m_3, m_4 : masses des arbres **1**, **2**, **3** et **4**, $J_E = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$: moment d'inertie des pièces **1**, **2** et **4** par rapport à leur axe de rotation, $J_T = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$: moment d'inertie de l'arbre de transmission **3** par rapport à son axe de rotation ;
- on néglige la masse et l'inertie des satellites des deux différentiels ;
- M_c : masse du châssis, la masse totale du véhicule est égale à M (voir FIGURE 3) ;
- $r_{12} = -1$: rapport de réduction entre les pièces **1** et **2**, $r_{23} = r_{34} = 1$: rapports de réduction entre les pièces **2** et **3** et **3** et **4** ;
- $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$: accélération de la pesanteur ;
- tous les rendements des engrenages sont supposés égaux à 1 ;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites, sauf celles entre les roues et la route.

L'étude est réalisée pour le cas d'un démarrage sur une route pentue et enneigée, c'est-à-dire telle que $\alpha = 10^\circ$.

4.2.1 Déterminer l'énergie cinétique du véhicule dans son mouvement par rapport à R_0

Question 1 Déterminer l'énergie cinétique du châssis dans son mouvement par rapport à R_0 .

Le châssis est en translation par rapport au sol et sa vitesse est $\dot{\lambda} \vec{x}_1^0 \Rightarrow E_{c(Ch/R_0)} = \frac{1}{2} M_c \dot{\lambda}^2$

Question 2 Déterminer l'énergie cinétique des roues dans leur mouvement par rapport à R_0 .

Les roues sont en rotation autour d'un axe lié au châssis, lui-même en translation à la même vitesse que le véhicule. Elles ont donc un mouvement plan. De plus, leur centre d'inertie est situé sur leur axe de rotation.

Ainsi : $E_{c(\text{roue}/R_0)} = \frac{1}{2} m_r \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} J_r \omega^2$.

Question 3 Déterminer l'énergie cinétique des autres solides en rotation dans leur mouvement par rapport à R_0 .

De la même manière, les autres solides sont aussi en rotation autour d'axes liés au châssis. Leur énergie cinétique est calculée de la même manière :

$$E_{c(i/R_0)} = \frac{1}{2} m_i \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} J_E \omega_i^2 \quad \text{avec } i \in [1, 2, 4] \quad \text{et} \quad E_{c(3/R_0)} = \frac{1}{2} m_3 \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} J_T \omega_3^2.$$

Question 4 En déduire l'énergie cinétique du véhicule, noté \mathbf{V} , dans son mouvement par rapport à R_0 .

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides est la somme des énergies cinétiques de chacun des solides :

$$E_{c(\mathbf{V}/R_0)} = E_{c(Ch/R_0)} + 4E_{c(\text{roue}/R_0)} + \sum_{i=1..4} E_{c(i/R_0)}$$

$$E_{c(\mathbf{V}/R_0)} = \frac{1}{2} (M_c + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 4m_r) \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} (4J_r \omega^2 + J_E \omega_1^2 + J_E \omega_2^2 + J_E \omega_4^2 + J_T \omega_3^2)$$

On note $M = M_c + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 4m_r$, la masse totale du véhicule.

Alors : $E_{c(\mathbf{V}/R_0)} = \frac{1}{2} M \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} (4J_r \omega^2 + J_E \omega_1^2 + J_E \omega_2^2 + J_E \omega_4^2 + J_T \omega_3^2)$

La notion d'inertie équivalente ramenée sur un axe est souvent utilisée pour faire des comparaisons ou simplifier des calculs.

Question 5 Montrer que les vitesses des différents solides en mouvement par rapport au châssis sont égales à ω (au signe près).

D'après le schéma cinématique, on peut vérifier qu'en ligne droite $\omega_2 = \omega$. Compte-tenu des rapports de réduction, on a alors $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$, et de même $\omega_1 = -\omega$.

Question 6 Déterminer l'inertie équivalente J_{eq} permettant d'exprimer l'énergie cinétique du véhicule sous la forme : $E_{c(\mathbf{V}/R_0)} = \frac{1}{2} J_{eq} \omega^2$. Pour cela, il est nécessaire de tenir compte de la relation de roulement sans glissement entre les roues et le sol, qui conduit à $\omega = -\frac{\dot{\lambda}}{R}$.

Puisque $\omega^2 = \left(\frac{\dot{\lambda}}{R}\right)^2$, on peut écrire : $E_{c(\mathbf{V}/R_0)} = \frac{1}{2} (MR^2 + 4J_r + 3J_E + J_T) \omega^2$.

Ainsi, par identification, $J_{eq} = MR^2 + 4J_r + 3J_E + J_T$.

4.2.2 Déterminer les puissances des actions mécaniques extérieures

Question 7 Écrire la puissance mécanique développée par l'action mécanique de la pesanteur agissant sur l'ensemble du véhicule au cours de son mouvement par rapport au repère R_0 .

$$P_{\text{pes} \rightarrow V/R_0} = \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow V}\} \otimes \{\mathcal{V}_{V/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\vec{x}_1 \end{array} \right\}_G = \boxed{-Mg \sin \alpha \dot{\lambda} = MgR \sin \alpha \omega}$$

Question 8 Donner la puissance développée par l'action mécanique sur le véhicule au niveau du contact entre les roues et le sol en A et en B .

La puissance dissipée au niveau du contact en A n'est pas une puissance d'inter-efforts car la route n'appartient pas au système. On doit donc la calculer en tenant compte de l'hypothèse de roulement sans glissement :

$$P_{\text{sol} \rightarrow R/R_0} = \{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{R/R_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} T_A\vec{x}_1 + N_A\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = \boxed{0}$$

On retrouve naturellement le même résultat en B . Ainsi, la seule puissance extérieure non nulle est celle de la pesanteur.

4.2.3 Déterminer les puissances des actions mécaniques intérieures

Question 9 Justifier que la puissance intérieure P_{int} est égale à $C_1\omega$.

Liaisons supposées parfaites, rendements égaux à 1, donc : $P_{Ch \leftrightarrow i} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{\text{int}} = C_1\omega}$

4.3 Valider les critères du cahier des charges

Question 10 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble du véhicule, dans son mouvement par rapport à R_0 et en déduire l'expression du couple C_1 .

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble du véhicule s'écrit :

$$\frac{dE_c(V/R_0)}{dt} = P_{\text{pes} \rightarrow V/R_0} + P_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad E_c(V/R_0) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \omega^2 \Rightarrow J_{\text{eq}} \omega \dot{\omega} = MgR \sin \alpha \omega + C_1 \omega$$

Après simplification, on obtient : $\boxed{C_1 = -\frac{J_{\text{eq}}}{R} \ddot{\lambda} - MgR \sin \alpha}$

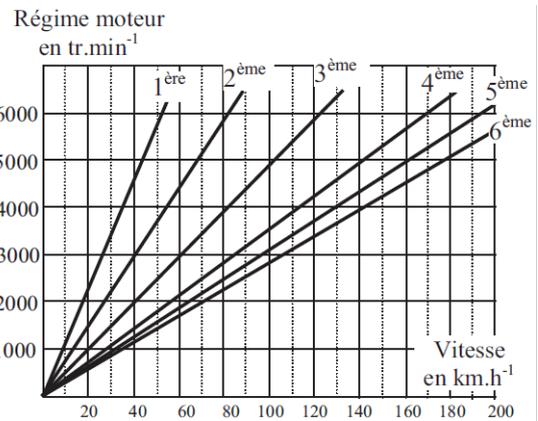
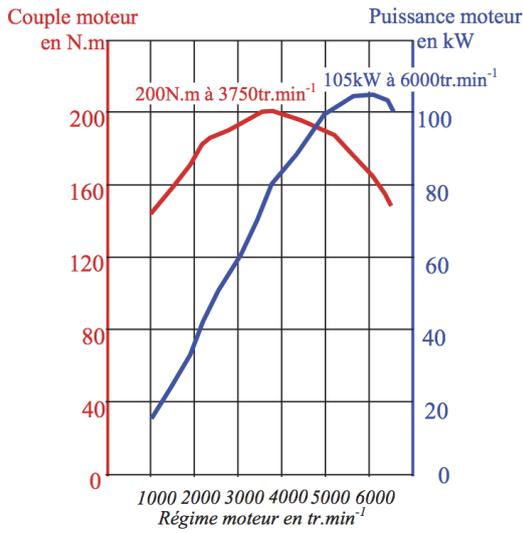
Question 11 Déduire du cahier des charges et de la configuration étudiée la valeur numérique du couple C_1 qu'il faut fournir à la pièce 1 pour garantir l'accélération désirée.

$$J_{\text{eq}} = 1580 \times 0,31^2 + 4 \times 1,4 + 3 \times 1,6 \cdot 10^{-3} + 2,4 \cdot 10^{-3} = 157,5 \text{ kg.m}^2$$

$$\text{Donc : } C_1 = -\frac{157,4}{0,31} \times 0,8 - 1580 \times 9,81 \times 0,31 \times \sin(10) = \boxed{-1240 \text{ N.m}}$$

Dans la phase de vie étudiée, le conducteur démarre sur le rapport de première vitesse. On note ω_m la vitesse de rotation de l'arbre moteur et C_m le couple exercé par le moteur. On néglige toutes les pertes.

On donne en FIGURE 6 les courbes caractéristiques du moteur et de l'étagement de la boîte de vitesse.



(a) Courbe de couple et de puissance du moteur

(b) Rapports de transmission de la boîte de vitesse

FIGURE 6 – Courbes caractéristiques du moteur (à gauche) et de la boîte de vitesse (à droite)

Question 12 A l'aide de la FIGURE 6b, déterminer le rapport de réduction entre la sortie du moteur et la pièce 1 : $r = \frac{\omega}{\omega_m}$. En déduire le couple moteur C_m pour répondre à l'exigence d'accélération.

La vitesse de la voiture est $V = R\omega = Rr\omega_m$, donc $r = \frac{V}{R\omega_m}$. D'après la figure, pour $V = 50 \text{ km/h}$, la vitesse de rotation de l'arbre moteur est $\omega_m = \frac{\pi \times 6000}{30} = 628,31 \text{ rad.s}^{-1}$. Alors $r = \frac{50/3,6}{0,31 \times 628,31} = \boxed{0,07}$.

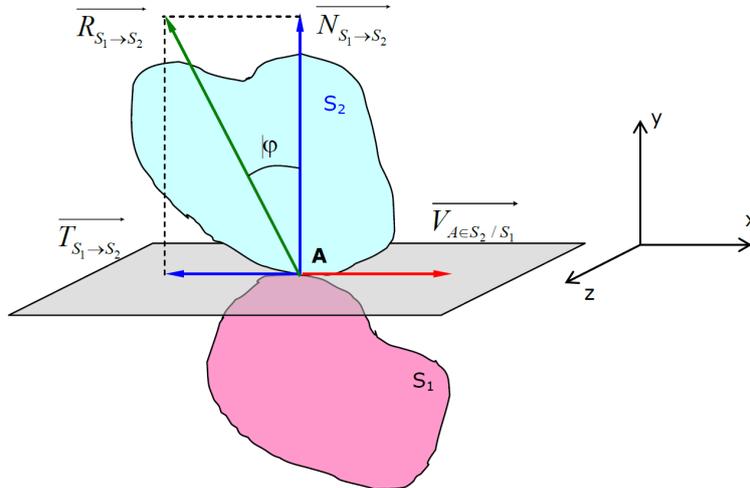
Puisque les pertes sont négligées, $C_m\omega_m = C_m^1\omega$ soit $C_m = rC_m^1 = 0,07 \times 1240 \approx \boxed{88 \text{ N.m}}$.

Question 13 A l'aide de la FIGURE 6a, vérifier que le moteur est capable de répondre à l'exigence d'accélération.

D'après la courbe de couple, ce couple est largement inférieur à celui que peut fournir le moteur dès 1000 tr/min. Le moteur est donc capable de fournir le couple nécessaire pour répondre à l'exigence d'accélération du cahier des charges.

5 Solides en contact

Soient S_1 et S_2 , deux solides en contact ponctuel avec frottement en A ($f = \tan \varphi$). On associe le repère $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au solide S_1 .



$$\text{On a : } \{ \mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{ \mathcal{V}_{S_2/S_1} \}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \\ \vec{V}_{A \in S_2/S_1} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \vec{V}_{A \in S_2/S_1} \cdot \vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{V}_{A \in S_2/S_1} \cdot \vec{F}_{S_1 \rightarrow S_2} < 0$$

Question 1 Déterminer $P_{S_1 \leftrightarrow S_2}$.

Définition : $P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = P_{S_1 \rightarrow S_2/R} + P_{S_2 \rightarrow S_1/R} = P_{S_1 \rightarrow S_2/S_1} + P_{S_2 \rightarrow S_1/S_1}$

Avec : $P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = \{ \mathcal{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{S_2/S_1} \} + \{ \mathcal{T}_{S_2 \rightarrow S_1} \} \otimes \underbrace{\{ \mathcal{V}_{S_1/S_1} \}}_{\{0\}}$

$$\text{D'où : } P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{S_1 \rightarrow S_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \\ \vec{V}_{A \in S_2/S_1} \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{ie : } P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = \vec{F}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{V}_{A \in S_2/S_1} = (\vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} + \vec{N}_{S_1 \rightarrow S_2}) \cdot \vec{V}_{A \in S_2/S_1}$$

$$P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = \vec{T}_{S_1 \rightarrow S_2} \cdot \vec{V}_{A \in S_2/S_1}$$



Remarque

On retrouve la formule simplifiée du cours !

6 Cas d'une liaison pivot glissant parfaite

Question 2 Déterminer la puissance des inter-efforts dans le cas d'une liaison pivot glissant d'axe x .

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{pmatrix} \\ A \end{matrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} \omega_{1/2}^x & V_{A,1/2}^x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A \end{matrix} \quad b$$

On a alors : $P_{S_1 \leftrightarrow S_2} = \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/2}\} = 0$

7 Chariot élévateur de bateau - XENS PSI 2012

7.1 Présentation

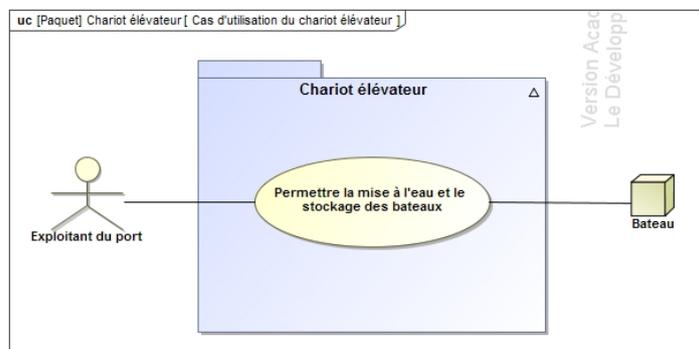
Le stockage des bateaux dans des « ports à sec » offre une solution alternative à la saturation des ports de plaisance tout en limitant fortement les contraintes d'entretien et de maintenance. Les bateaux sont stockés dans des casiers et sont mis à l'eau et rangés grâce à des chariots élévateurs à bateaux. L'objet de cette étude, représenté sur les photos ci-dessous, est l'un de ces chariots élévateurs qui assurent les opérations de « sortie de l'eau - dépose dans le casier » ou « sortie du casier - mise à l'eau ». Compte tenu du nombre important de bateaux stockés, la prestation principale doit satisfaire l'impatience des plaisanciers. Le diagramme en bas de cette page décrit cette prestation.



Chargement du bateau



Mise à l'eau du bateau



«requirement»
Respecter une cadence de mise à l'eau
 Id = "42"
 Text = "Le système devra permettre de mettre à l'eau 16 bateaux à l'heure"

Ce type de chariot élévateur, représenté sur la figure ci-dessous, permet la manutention de bateaux de 3000 kg à une hauteur de 8 m. Il est principalement constitué :

- du chariot qui assure le déplacement de l'ensemble et apporte la puissance pour la préhension et le levage ;
- du tablier, constitué du mât et des fourches, qui permet la préhension et la dépose du bateau.

Objectif

L'objectif est de valider quelques exigences issues du cahier des charge (voir page suivante)



Exigence		Valeur
1	Permettre au conducteur de charger et décharger le bateau en toute sécurité	
1.01	Vitesse de levage à vide	$0,38 \text{ m.s}^{-1}$
1.02	Vitesse de levage en charge	$0,33 \text{ m.s}^{-1}$
1.03	Temps de mise en action	0,4 m
1.04	Hauteur de levage	8 m
1.05	Charge maximale	3000 kg
1.06	Effort exercé par les fourches sur la coque du bateau	$< 15\,000 \text{ N}$
1.07	Vitesse angulaire de la fourche T8 lors de la phase de fermeture	Norme de la vitesse $< 0,2 \text{ rad.s}^{-1}$
1.08	Positions angulaires extrêmes de la fourche droite T8	Fermée : $\theta_1 = 0^\circ$ Ouverte : $\theta_1 = 30^\circ$
1.09	Temps d'ouverture (fermeture) entre les deux positions extrêmes de la poutre droite	5 s
1.10	Ouverture angulaire identique pour les deux fourches	à définir
2	S'adapter à la route	
2.01	Asservissement de l'inclinaison des fourches par rapport à l'horizontale à une valeur constante	Précisé dans la suite du sujet
2.02	Amplitude de l'angle de basculement	$\pm 10^\circ$

TABLE 1 – Extrait du recueil des exigences

7.2 Travail demandé

7.2.1 Phase de levage

Dans cette partie, on considère que le chariot est à l'arrêt et que le levage est le seul mouvement actif. Le modèle retenu pour cette étude est le schéma de principe proposé page suivante. En raison de la symétrie du tablier par rapport à son plan médian vertical, le modèle d'étude peut se ramener à un système comprenant un seul vérin, une seule chaîne et une seule poulie. L'adaptation des caractéristiques cinétiques des différents solides est déjà prise en compte dans les données fournies dans le sujet afin d'assurer la cohérence entre le système réel et la modélisation choisie.

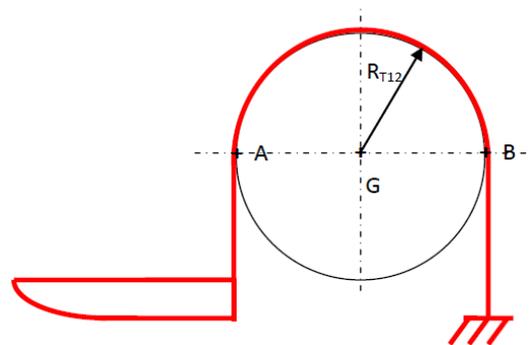
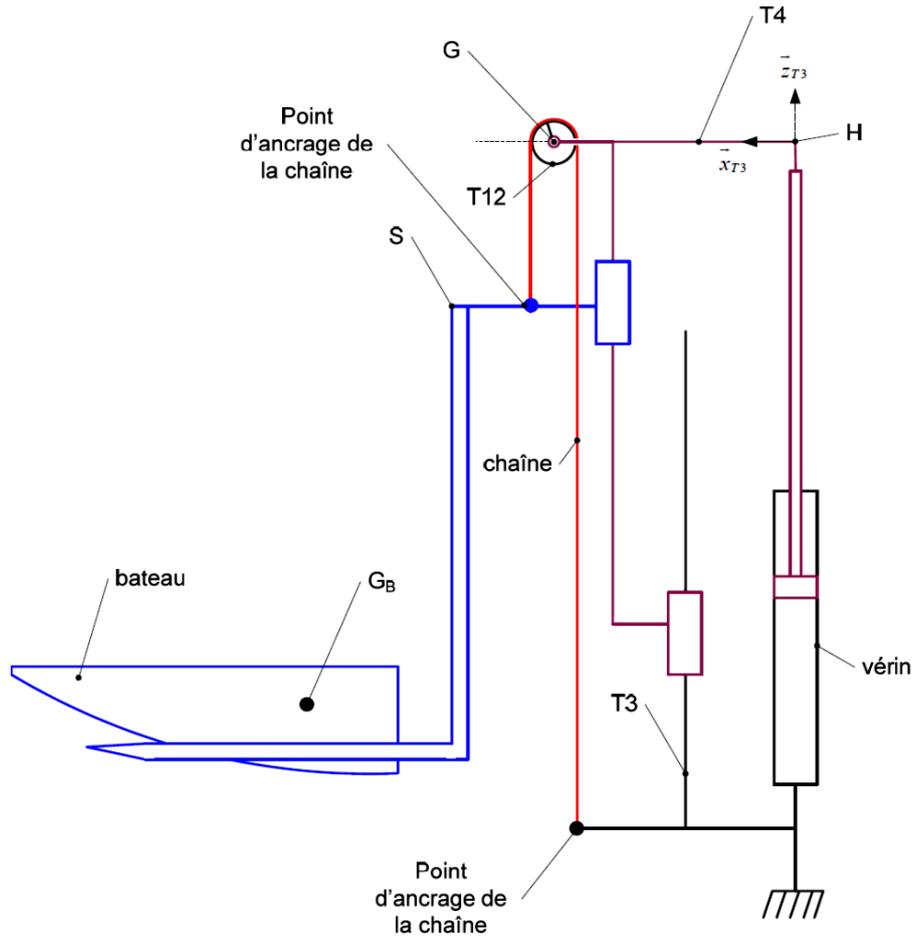
- L'actionneur est un vérin hydraulique dont le corps est en liaison encastrement avec le mât inférieur. La tige est solidaire du mât supérieur. Le levage de l'ensemble $S = \{T_5, T_6, \dots, T_{11}\}$

est obtenu à l'aide d'une chaîne présentant un point d'ancrage sur le mât inférieur et un point d'ancrage sur l'ensemble (S). Cette chaîne roule sans glisser sur le pignon T_{12} qui est en liaison pivot par rapport au mât supérieur.

- Le bateau étant à l'arrêt en position basse, le conducteur actionne le levage du bateau. L'effort de poussée fourni par le vérin est F_v (considéré comme constant).
- On note I_{12} le moment d'inertie de la poulie T_{12} par rapport à son axe de rotation, $R_{T_{12}}$ son rayon. Sa masse est négligée.
- Les masses des différents solides sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Solide	Masse
Ensemble (S)	m_S
Bateau B	m_B
Mât inférieur T_3	M_{T_3}
Mât supérieur T_4	M_{T_4}
Chaîne C	Négligée

- Les liaisons sont parfaites. La chaîne est non dissipative.
- Le repère R_{T_3} peut être considéré comme un référentiel galiléen pour les conditions de l'étude. Les axes \vec{z}_{T_3} et \vec{z}_0 sont confondus pour les conditions de l'étude.
- On considèrera que G_B est le centre de gravité de l'ensemble $\{S + B\}$, et que G est le centre de gravité de T_4 .



Question 1 Montrer que $\vec{V}_{H \in T_4 / R_0} = \frac{1}{2} \cdot \vec{V}_{G_B \in B / R_0}$. On pourra s'appuyer sur l'image ci-contre pour démontrer ce résultat et utiliser l'hypothèse de roulement sans glissement du câble sur la poulie aux points A et B.

$$\vec{V}_{H \in T_4 / R_0} = \vec{V}_{G \in T_4 / R_0} \quad (\text{mvt de translation})$$

$$\vec{V}_{G \in T_4 / R_0} = \vec{V}_{G \in T_{12} / R_0} \quad (\text{pivot}) \quad (1)$$

$$\text{Et : } \vec{V}_{G_B \in B / R_0} = \vec{V}_{A \in C / R_0}$$

$$\text{Rsg en A : } \vec{V}_{A \in T_{12} / C} = \vec{0} = \vec{V}_{A \in T_{12} / R_0} - \vec{V}_{A \in C / R_0} \Rightarrow \vec{V}_{A \in T_{12} / R_0} = \vec{V}_{G_B \in B / R_0} \quad (2)$$

$$\text{Rsg en B : } \vec{V}_{B \in T_{12} / C} = \vec{0} = \vec{V}_{B \in T_{12} / R_0} - \underbrace{\vec{V}_{B \in C / R_0}}_{\vec{0}} \Rightarrow \vec{V}_{B \in T_{12} / R_0} = \vec{0} \quad (3)$$

Champs des vecteurs vitesses :

$$\vec{V}_{A \in T_{12} / R_0} = \vec{V}_{G \in T_{12} / R_0} + \vec{AG} \wedge \vec{\Omega}_{T_{12} / R_0} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{V_{B \in T_{12}/R_0}} = \overrightarrow{V_{G \in T_{12}/R_0}} + \overrightarrow{BG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{T_{12}/R_0}} \quad (5)$$

$$(4)+(5) \Rightarrow 2\overrightarrow{V_{G \in T_{12}/R_0}} = \overrightarrow{V_{A \in T_{12}/R_0}} + \overrightarrow{V_{B \in T_{12}/R_0}} \quad (\text{car : } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB})$$

En reprenant (1), (2) et (3) :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{H \in T_4/R_0}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{G_B \in B/R_0}}}$$

Question 2 Isoler l'ensemble $E = \{B, S, C, T_{12}, T_4\}$ et déterminer l'accélération galiléenne a_{G_B} du bateau en fonction de l'effort fourni par le vérin et des caractéristiques du système par application du Théorème de l'Énergie Cinétique.

TEC appliqué à $E = \{B, S, C, T_{12}, T_4\}$: $\frac{dE_{c(E/R_0)}}{dt} = P_{\bar{E} \rightarrow E/R_0} + P_{\text{int}}^E$

Pour la suite, on notera : $V_H = \|\overrightarrow{V_{H \in T_4/R_0}}\|$ et $V_{G_B} = \|\overrightarrow{V_{G_B \in B/R_0}}\|$.

Calcul des puissances :

• IAME :

$$\diamond \{\mathcal{T}_{\text{verin} \rightarrow E}\} = \begin{matrix} \\ H \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} F_v \cdot \overrightarrow{z_{T_3}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P_{\text{verin} \rightarrow E/R_0} = F_v \cdot V_H$$

$$\diamond \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow T_4}\} = \begin{matrix} \\ G \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -m_{T_4} g \cdot \overrightarrow{z_{T_3}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P_{\text{pes} \rightarrow T_4/R_0} = -m_{T_4} g \cdot V_H$$

$$\diamond \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow B+S}\} = \begin{matrix} \\ G_B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -(m_S + m_B) g \cdot \overrightarrow{z_{T_3}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P_{\text{pes} \rightarrow T_4/R_0} = -(m_S + m_B) g \cdot V_{G_B}$$

• Puissances extérieures : $P_{\bar{E} \rightarrow E/R_0} = \left[\frac{1}{2}(F_v - m_{T_4}g) - (m_S + m_B)g \right] \cdot V_{G_B}$

• Puissances intérieures : $P_{\text{int}}^E = 0$ (liaisons parfaites)

Calcul de l'énergie cinétique :

$$E_{c(E/R_0)} = \frac{1}{2}(m_S + m_B)V_{G_B}^2 + \frac{1}{2}m_{T_4}V_H^2 + \frac{1}{2}I_{12}\omega_{T_{12}/R_0}^2 \quad \text{avec : } \omega_{T_{12}/R_0} = \frac{V_{G_B}}{R_{T_{12}}}$$

Soit :

$$\boxed{E_{c(E/R_0)} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[m_S + m_B + \frac{1}{4}m_{T_4} + \frac{1}{R_{T_{12}}^2}I_{12} \right]}_{M_{eq}} \cdot V_{G_B}^2}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_{c(E/R_0)}}{dt} = M_{eq} V_{G_B} a_{G_B}$$

D'où, en appliquant le TEC :

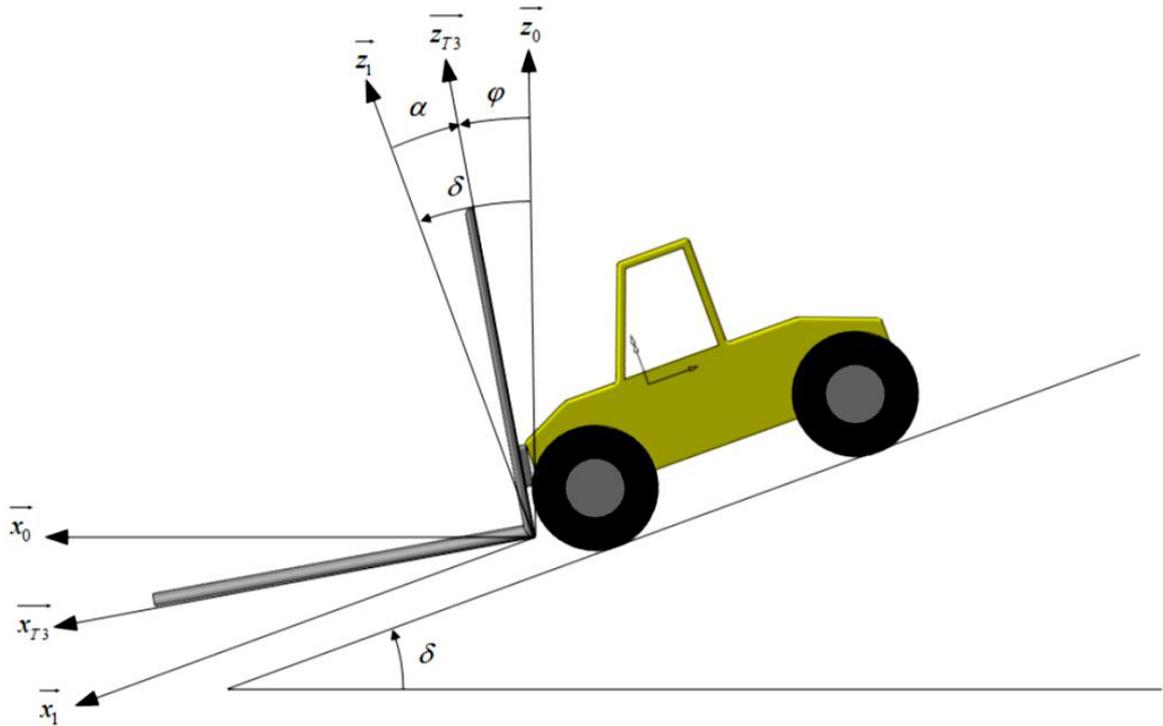
$$\boxed{a_{G_B} = \frac{1}{2M_{eq}} [(F_v - m_{T_4}g) - 2(m_S + m_B)g]}$$

7.2.2 Phase de déplacement

La zone de stockage des bateaux se situe nécessairement à une altitude supérieure à celle du quai de déchargement. Afin d'éviter le glissement du bateau lorsque le chariot descend une pente, un dispositif permet de maintenir les fourches horizontales durant le déplacement. Lors d'une phase de

décélération, les fourches sont automatiquement inclinées vers l'arrière pour éviter le glissement du bateau. Ce mouvement, de faible amplitude, est assuré par l'asservissement des vérins d'inclinaison du tablier T_1 , T_2 et T_1' , T_2' . Ce dispositif présente l'avantage de prendre en charge de manière entièrement automatisée l'un des mouvements du tablier. Le conducteur peut alors charger et mettre à l'eau le bateau sans avoir à gérer manuellement le mouvement d'inclinaison. La figure ci-dessous permet de définir :

- l'angle de basculement $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}_{T_3})$
- l'inclinaison de la pente $\delta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$
- l'angle à asservir $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_{T_3}) = \delta - \alpha$

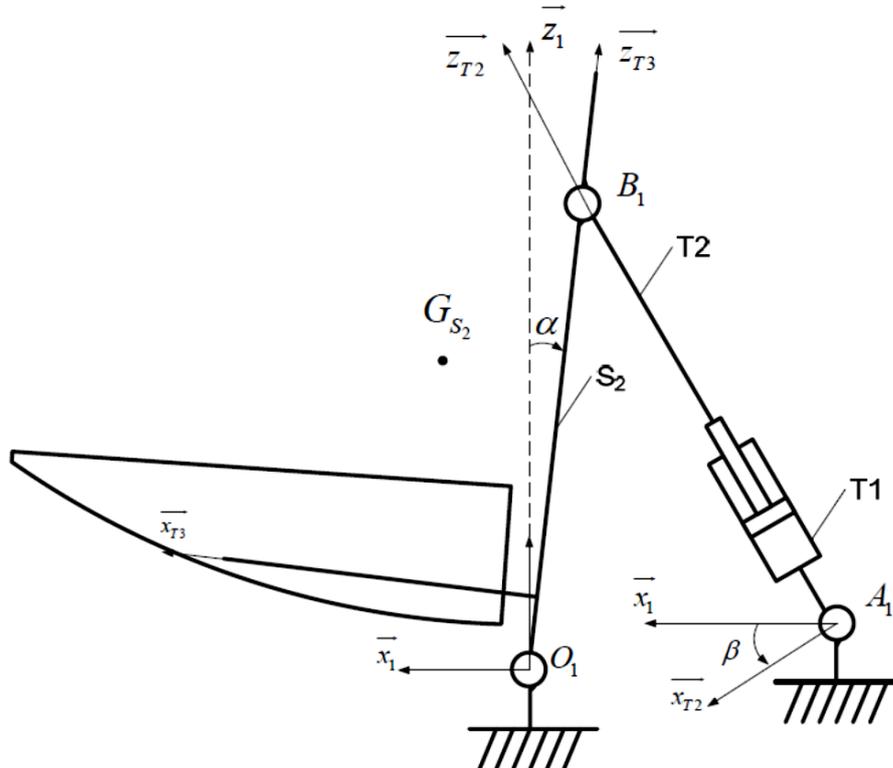


Afin de valider les performances de l'asservissement, on souhaite établir un modèle de comportement dynamique des fourches.

Nous considérons dans cette partie que le seul mouvement actif est le basculement. L'objectif est d'obtenir un modèle dynamique du mécanisme de basculement à partir de la modélisation plane proposée sur la figure ci-dessous.

- On étudiera l'ensemble $S_2 = \{T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, B\}$ en liaison pivot d'axe (O_1, \vec{y}_1) par rapport au chariot **1** de centre de gravité G_{S_2} . Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe (O_1, \vec{y}_1) sera noté J_{S_2} et sa masse m_{S_2} .
- $\vec{O}_1 G_{S_2} = \begin{pmatrix} x_{G_{S_2}} \\ 0 \\ z_{G_{S_2}} \end{pmatrix}_{R_{T_3}}$
- La liaison pivot entre l'ensemble S_2 et le chariot génère un couple résistant $\vec{C}_\mu = -\mu \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_0$
- Un vérin équivalent $V = \{T_1, T_2\}$ dont la tige est en liaison pivot d'axe (A_1, \vec{y}_0) par rapport au chariot **1** et le corps en liaison pivot d'axe (B_1, \vec{y}_0) par rapport à l'ensemble. La masse et l'inertie du vérin sont négligées.

- Le vérin développe un effort au cours du mouvement qui sera noté $\vec{F}_v = p(t)S \cdot \vec{z}_{T_2}$ où $p(t)$ est la différence de pression entre les deux chambres du vérin.
- On pose $\vec{AB} = (\lambda_0 + \lambda) \cdot \vec{z}_{T_2}$
- Le paramétrage est tel que si $\alpha = 0$ alors $\lambda = 0$.



- Une simulation a permis de tracer la courbe qui donne sur la plage de variation de $\alpha(t)$ qui correspond au mouvement de basculement. L'analyse de cette courbe nous permet d'approximer une relation linéaire entre $\alpha(t)$ et $\lambda(t)$ de la forme $\alpha(t) = k\lambda(t)$ où k est une constante.

Question 3 Proposer une démarche afin de déterminer ce paramètre k de manière analytique.

Loi entrée/sortie de type fermeture géométrique.

Question 4 En appliquant le Théorème de l'Énergie Cinétique à l'ensemble $\{S_2, T_2\}$ et en admettant que l'angle α est petit ($\vec{z}_{T_3} \approx \vec{z}_1$), montrer que $\alpha(t)$ et $p(t)$ sont liés par l'équation différentielle suivante :

$$J_{eq}\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} = \frac{p(t)S}{k} + m_{S_2}g \left(x_{G_{S_2}} \cos \delta + z_{G_{S_2}} \sin \delta \right)$$

On va appliquer le TEC à $\{S_2, T_2\}$:

Pour la suite, on notera : $V_{B_1} = \left\| \overrightarrow{V_{B_1 \in T_2 / R_0}} \right\|$ et $V_{G_2} = \left\| \overrightarrow{V_{G_{S_2} \in S_2 / R_0}} \right\|$.

Calcul des puissances :

- IAME :
 - ◊ $\{\mathcal{T}_{V \rightarrow T_2}\} \Rightarrow P_{V \rightarrow T_2 / R_0} = pS \cdot V_{B_1}$
 - ◊ $\{\mathcal{T}_{ch \rightarrow S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -\mu\dot{\alpha} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_1} \Rightarrow P_{ch \rightarrow S_2 / R_0} = -\mu\dot{\alpha}^2$

$$\diamond \{ \mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_2} \} = \left\{ \begin{array}{c} -m_{S_2} g \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{et : } \overrightarrow{V_{G_{S_2} \in S_2 / R_0}} = \dot{\varphi} (-x_{G_{S_2}} \cdot \vec{z}_{T_3} + z_{G_{S_2}} \cdot \vec{x}_{T_3})$$

$$\text{Soit : } P_{\text{pes} \rightarrow S_2 / R_0} = m_{S_2} g \dot{\alpha} (x_{G_{S_2}} \cos \varphi + z_{G_{S_2}} \sin \varphi) \quad (\text{avec } \dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \delta \text{ et } \delta = 0)$$

- Puissances extérieures : $P_{\bar{E} \rightarrow E / R_0} = \dot{\alpha} \left[\frac{pS}{k} - \mu \dot{\alpha} + m_{S_2} g (x_{G_{S_2}} \cos \varphi + z_{G_{S_2}} \sin \varphi) \right]$
- Puissances intérieures : $P_{\text{int}}^E = 0$ (liaisons parfaites)

Calcul de l'énergie cinétique :

$$E_{c(E/R_0)} = E_{c(S_2/R_0)} = \frac{1}{2} J_{S_2} \dot{\alpha}^2 = \boxed{\frac{1}{2} J_{eq} \dot{\alpha}^2}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_{c(E/R_0)}}{dt} = J_{eq} \dot{\alpha} \ddot{\alpha}$$

$$\text{D'où, en appliquant le TEC : } J_{eq} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} = \frac{p(t)S}{k} + m_{S_2} g (x_{G_{S_2}} \cos \varphi + z_{G_{S_2}} \sin \varphi)$$

Or $\varphi = \alpha + \delta$, donc si α est petit, on retrouve bien l'expression demandée.