ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 10/03/25

Préparation à l'interrogation n°20

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

2 Trigonométrie

1. $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ 2. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$; 2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$; 3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

4 Réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\iff \pi_u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ scindé à racines simples et annulateur de } u \end{aligned}$$

5 Suites et séries de fonctions

1. Théorème de convergence dominée ;
2. Théorème d'intégration terme à terme ;
3. Théorème de double limite pour une série de fonctions ;
4. Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ pour une série de fonctions.

6 Exercices types

1. Fonction Γ : relation fonctionnelle, régularité $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$;
2. Intégrales de Bertrand ;
3. Polynôme caractéristique d'une matrice compagne ;
4. Inégalité arithmético-géométrique ;
5. Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
6. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
7. Fermeture de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Exercice type

Montrer qu'une union de deux sous-groupes de G est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.

Corrigé : 1. Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes. Supposons qu'il existe $a \in \mathrm{H}_1 \setminus \mathrm{H}_2$. Soit $b \in \mathrm{H}_2$. On a $a \star b \in \mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2$, autrement dit $a \star b \in \mathrm{H}_1$ ou $a \star b \in \mathrm{H}_2$. Si $a \star b \in \mathrm{H}_2$, alors $(a \star b) \star b^{-1} = a \in \mathrm{H}_2$ ce qui est exclu. Il s'ensuit que $a \star b \in \mathrm{H}_1$ et par suite $a^{-1} \star (a \star b) = b \in \mathrm{H}_1$ ce qui prouve $\mathrm{H}_2 \subset \mathrm{H}_1$. Si un tel a n'existe pas, alors $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_2$. On conclut

$$\boxed{\text{Une union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.}}$$

8 Questions de cours

Groupes, développements en série entière usuels, graphes usuels.