Corrigé du devoir en temps libre n°15

Problème I

L'ensemble $\mathrm{U} = \|\cdot\|^{-1}(]\,0\,;+\infty\,[)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par la norme, application continue car 1-lipschitzienne. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, notant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec les x_i réels, on a

$$\forall x \in \mathrm{U} \qquad f(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

Les fonctions coordonnées sont données par

$$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \forall x \in \mathrm{U} \qquad f_i(x) = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Ces fonctions sont rationnelles, bien définies sur U donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U},\mathrm{E})}$$

Par dérivation, on trouve

$$\forall (i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2 \qquad \forall x \in \mathrm{U} \qquad \partial_i f_j(x) = \frac{\delta_{i,j}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_i x_j}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2}$$

d'où $\qquad \forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \forall x \in \mathrm{U} \qquad \partial_i f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_i f_j(x) e_j = \dfrac{1}{\|x\|^2}\left[e_i - 2\dfrac{x_i}{\|x\|}\dfrac{x}{\|x\|}\right]$

Et par conséquent, pour $(x,h) \in \mathrm{U}\times\mathrm{E}$

$$\mathrm{d}f(x)\cdot h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) h_i = \frac{1}{\|x\|^2}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i e_i - 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}{\|x\|}\frac{x}{\|x\|}\right] = \frac{1}{\|x\|^2}\left[h - 2\frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}\frac{x}{\|x\|}\right]$$

Le vecteur $x/\|x\|$ forme une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(x)$ et on reconnaît entre crochet l'expression de la réflexion orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(x)^\perp$. On conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{U} \qquad \mathrm{d}f(x) = \frac{1}{\|x\|^2} s_{\mathrm{Vect}\,(x)^\perp}}$$

Variante : Pour $(x,h) \in \mathrm{U}\times\mathrm{E}$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{x+h}{\|x\|^2 + 2\langle x,h\rangle + \|h\|^2} = \frac{x+h}{\|x\|^2}\left(1 + 2\frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + \mathrm{o}(h)\right)^{-1} \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2}\left(1 - 2\frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + \mathrm{o}(h)\right) = \frac{x}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2}\left[h - 2\frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}\frac{x}{\|x\|}\right] + \mathrm{o}(h) \end{aligned}$$

On retrouve le résultat précédent.

Problème II

1. Soit $\alpha > 0$. Supposons f α-fortement monotone. Pour $(x,h) \in \mathrm{E}^2$ et $t \neq 0$, on a $th \xrightarrow[t\to 0]{} 0_{\mathrm{E}}$ d'où

$$f(x+th) - f(x) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{d}f(x)\cdot(th) + \mathrm{o}(t) = t\,(\mathrm{d}f(x)\cdot h + \mathrm{o}(1))$$

puis $$\langle f(x+th) - f(x), th\rangle = t^2\,\langle \mathrm{d}f(x)\cdot h + \mathrm{o}(1), h\rangle \geqslant \alpha\|th\|^2 = \alpha t^2\|h\|^2$$

d'où $$\langle \mathrm{d}f(x)\cdot h + \mathrm{o}(1), h\rangle \geqslant \alpha\|h\|^2$$

Faisant tendre $t \to 0$, on obtient $\quad \langle \mathrm{d}f(x)\cdot h, h\rangle \geqslant \alpha\|h\|^2$

Supposons désormais cette condition satisfaite pour tout $(x,h) \in \mathrm{E}^2$. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \mathrm{d}f(y + t(x-y))\cdot(x-y)\,\mathrm{d}t$$

Puis, par linéarité du produit scalaire en la première variable (en dimension finie), il vient

$$\begin{aligned}\langle f(x) - f(y), x-y\rangle &= \left\langle \int_0^1 \mathrm{d}f(y+t(x-y))\cdot(x-y), x-y\right\rangle \\ &= \int_0^1 \langle \mathrm{d}f(y+t(x-y))\cdot(x-y), x-y\rangle\,\mathrm{d}t \\ \langle f(x) - f(y), x-y\rangle &\geqslant \int_0^1 \alpha\|x-y\|^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{Les deux assertions sont équivalentes.}}$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $h \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{d}f(x)\cdot h = 0_{\mathrm{E}}$. Alors

$$\alpha\|h\|^2 \leqslant \langle \mathrm{d}f(x)\cdot h, h\rangle = 0$$

d'où l'injectivité de $\mathrm{d}f(x)$ et comme $\mathrm{d}f(x)$ est un endomorphisme sur un espace de dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E}\text{, la différentielle } \mathrm{d}f(x) \text{ est bijective.}}$$

3.(a) Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\alpha\|x-y\|^2 \leqslant \langle f(x) - f(y), x-y\rangle \leqslant \|f(x) - f(y)\|\|x-y\|$$

d'où $$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \alpha\|x-y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|$$

l'inégalité étant trivialement vraie pour $x = y$. L'ensemble Im g est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ donc admet une borne inférieure m finie. Pour $x \in \mathrm{E}$, on a

$$\sqrt{g(x)} = \|f(x) - b\| \geqslant \|f(x) - f(0)\| - \|f(0) - b\| \geqslant \alpha\|x\| - \|f(0) - b\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$$

Donc, il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $g(x) \geqslant g(0)$ pour $\|x\| > \mathrm{R}$. La boule fermée $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$ est un fermé borné de l'espace E de dimension finie et il s'agit donc d'un compact. Ainsi, l'application g, continue comme composée de telles fonctions, atteint son minimum sur $\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})$. En particulier, on a $g(0) \geqslant \underset{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})}{\mathrm{Min}}\, g$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R}) \qquad g(x) \geqslant \underset{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})}{\mathrm{Min}}\, g \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R}) \qquad g(x) \geqslant \underset{\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})}{\mathrm{Min}}\, g$$

On conclut $\boxed{\text{La fonction } g \text{ atteint un minimum sur E.}}$

3.(b) Par composition, l'application $g = \langle f-b, f-b\rangle$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\mathrm{d}g = \langle \mathrm{d}f, f-b\rangle + \langle f, \mathrm{d}f - b\rangle = 2\,\langle f-b, \mathrm{d}f\rangle$$

Ainsi $\boxed{\forall (a,h) \qquad \mathrm{d}g(a)\cdot h = 2\,\langle f(a)-b, \mathrm{d}f(a)\cdot h\rangle}$

3.(c) D'après l'inégalité obtenue à la question 3.(a)

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2 \qquad \alpha\|x-y\| \leqslant \|f(x)-f(y)\|$$

l'application f est clairement injective. Soit $x_0\in\mathrm{E}$ tel que $m = g(x_0)$. Comme E est un ouvert de lui-même, le point x_0 est point critique et on a donc $\mathrm{d}g(x_0) = 0$ d'où

$$\forall h\in\mathrm{E} \qquad \langle f(x_0)-b, \mathrm{d}f(x_0)\cdot h\rangle = 0$$

En particulier, pour $h = \mathrm{d}f(x_0)^{-1}\cdot(f(x_0)-b)$, on obtient $\|f(x_0)-b\|^2 = 0$ d'où $b = f(x_0)$ ce qui prouve la surjectivité de f et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bijective.}}$$

Problème III

1. La fonction f est polynomiale car de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y)+3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)+3y^2$$

On résout : $\begin{cases} 2(x+y)+3x^2 = 0 \\ 2(x+y)+3y^2 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}(x-y)(x+y) = 0 \\ 2(x+y)+3x^2 = 0\end{cases}$

$$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ ont pour coordonnées } (0,0) \text{ et } \left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right).}$$

2. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x+2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y+2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 2$$

• En $(0,0)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ est de déterminant nul. Par conséquent, les conditions du deuxième ordre ne permettent pas de conclure. On a $f(0,0) = 0$. En développant, on trouve

$$f(x,-x-x^2) \underset{x\to 0}{=} -2x^4 + \mathrm{o}(x^4) \quad \text{et} \quad (x,-x-x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} (0,0)$$

Par ailleurs $\qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x,0) = x^2+x^3 \quad \text{et} \quad (x,0)\xrightarrow[x\to 0]{} (0,0)$

donc la fonction f prend des valeurs positives et négatives au voisinage de $(0,0)$. Ainsi

$$\boxed{\text{Le point } (0,0) \text{ n'est pas un extremum local.}}$$

• En $\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$, la matrice hessienne $\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ est de déterminant égal à $32 > 0$ et de trace égale à $-12 < 0$. Le point considéré est donc un maximum local strict. En observant $f(x,0) = x^2+x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on obtient que le maximum n'est pas global. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ admet un unique extremum qui est un} \\ \text{maximum local strict non global atteint en } \left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right).\end{array}}$$

3. La boule fermée $\mathrm{B}_f(0,1)$ est un fermé borné de l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension finie et est donc compact. Par conséquent, la fonction continue f atteint ses bornes sur $\mathrm{B}_f(0,1)$. Celles-ci sont atteintes soit dans l'intérieur $\mathrm{B}(0,1)$, soit sur la frontière $\partial\mathrm{B}_f(0,1)$. Si elles sont atteintes à l'intérieur donc dans un ouvert, alors elles sont points critiques et l'unique point critique présent dans $\mathrm{B}(0,1)$ est le point $(0,0)$ qui n'est pas extremum. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet des extremums globaux sur } \mathrm{B}_f(0,1) \text{ et les atteint sur } \partial\mathrm{B}_f(0,1).}$$

4. On a $\underset{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)}{\mathrm{Max}} f(x,y) = \underset{t\in\mathbb{R}}{\mathrm{Max}}\, f(\cos t, \sin t) \qquad \underset{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)}{\mathrm{Min}} f(x,y) = \underset{t\in\mathbb{R}}{\mathrm{Min}}\, f(\cos t, \sin t)$

On pose $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t + \sin t)^2 + \cos^3 t + \sin^3 t$

Pour t réel $\qquad g(t) = (\cos t + \sin t)^2 + \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t)(3 - (\cos t + \sin t)^2)$

Ainsi $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = \dfrac{1}{2} h(\cos t + \sin t) \quad$ où $\quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad h(u) = 3u + 2u^2 - u^3$

La fonction h est dérivable avec $h'(u) = 3 + 4u - 3u^2$ pour u réel d'où le tableau de variations

u		$\frac{2-\sqrt{13}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{13}}{3}$	
$h(u)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

On a $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ainsi $\quad \underset{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)}{\mathrm{Max}} f(x,y) = \underset{u\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}{\mathrm{Max}} \dfrac{h(u)}{2} \quad$ et $\quad \underset{(x,y)\in\mathrm{B}_f(0,1)}{\mathrm{Min}} f(x,y) = \underset{u\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}{\mathrm{Min}} \dfrac{h(u)}{2}$

Quelques considérations algébriques permettent d'établir

$$-\sqrt{2} < \frac{2-\sqrt{13}}{3} < \sqrt{2} < \frac{2+\sqrt{13}}{3}$$

ce qui prouve que la fonction h atteint son maximum sur $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ en $\sqrt{2}$ et son minimum $\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}$ d'où des valeurs de $t = \dfrac{\pi}{4}$ et $t = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{2}\right)$ pour la fonction g et on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sur } \mathrm{B}_f(0,1)\text{, la fonction } f \text{ atteint son maximum en } \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et} \\ \text{son minimum en } (\cos\alpha, \sin\alpha) \text{ avec } \alpha = \dfrac{\pi}{4} \pm \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3\sqrt{2}}\right).\end{array}}$$