

DM 13 à rendre le vendredi 14/03/25

Refroidissement des supraconducteurs

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{w}), à l'exception des vecteurs unitaires notés avec un chapeau (\hat{u}). Les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les *données numériques* nécessaires et un *formulaire*, relatif en particulier aux coordonnées sphériques, figurent en fin d'énoncé.

NB : C'est une épreuve sans calculatrice.

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ($T < T_{sc}$) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique *permanent* sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique λ de la loi de FOURIER, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'*intérieur* du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur laplacien.}$$

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de NEWTON : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température T vers le fluide de température T_f , par unité de temps et par unité d'aire, est $j_{\text{par}} = k(T - T_f)$ où k est une constante. Les études menées en **I.A** et **I.B** sont totalement indépendantes.

I.A Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Le matériau (supraconducteur) étudié dans cette partie **I.A** à la forme d'une boule de rayon R , de température uniforme $T(t)$. Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante $T_0 < T_{sc}$ (cf. figure 1).

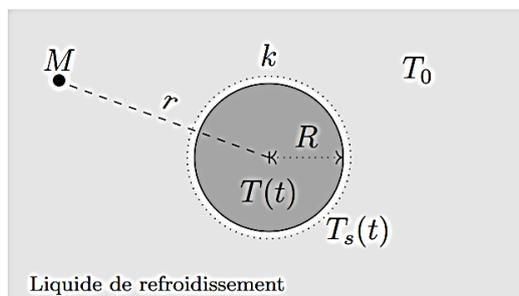


FIGURE 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

- – 1. Donner, en les justifiant, les unités (ou les dimensions) de k et λ .
Établir, dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus. (unidimensionnel en coordonnées sphériques)

- – 2. Rappeler l'expression de la diffusivité thermique D_{th} d'un matériau.
À quelle condition, portant sur la durée Δt du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme *uniforme* est-elle légitime? *On se placera dans ce cas dans la suite.*
- – 3. Exprimer en fonction des données la capacité thermique C_{th} de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement R_{th} associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température T_f en un point M du liquide supposé immobile ne dépend que de la distance r au centre O de la boule (figure 1). On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée λ' .

- – 4. Montrer que $T_f(r,t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] R/r$
- – 5. Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique?
Exprimer la résistance thermique R'_{th} associée au refroidissement conductif, en fonction de λ' et R .

On suppose pour finir que $\lambda' \gg Rk$.

- – 6. Déterminer l'équation d'évolution de la température $T(t)$ de la boule solide ; on posera $\tau = \frac{\rho R c}{3k}$.
- – 7. On notera $T_i = T(t = 0)$ la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe $T(t)$ et exprimer la durée Δt au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur \mapsto supraconducteur.

I.B Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

L'absence de résistivité dans les matériaux supraconducteurs n'empêche pas, notamment dans le cadre de régimes transitoires électromagnétiques, l'existence de dissipations de puissance dues au champ électrique induit. Il s'ensuit un chauffage local du matériau supraconducteur. Le passage éventuel de celui-ci au-dessus de la température critique T_{sc} a alors un effet catastrophique : l'effet Joule apparaît, la température augmente de plus en plus et la surchauffe du bobinage peut détruire celui-ci : c'est le phénomène de *quench* (voir figure 2).



FIGURE 2 – Fuite d'hélium suite à la destruction (*quench*) d'un aimant supraconducteur utilisé pour la RMN. Département de Chimie de l'université de l'Alberta

On va dans ce qui suit s'intéresser aux conditions de refroidissement propres à éviter le phénomène de quench.

Le matériau supraconducteur étudié a la forme d'un fil cylindrique de rayon R , de très grande longueur (figure 3). Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient une température uniforme $T_0 < T_{sc}$, avec lequel les échanges thermiques se font selon la loi de NEWTON. La totalité du fil cylindrique est le siège d'une production de puissance électromagnétique avec la densité volumique supposée uniforme et constante p_u .

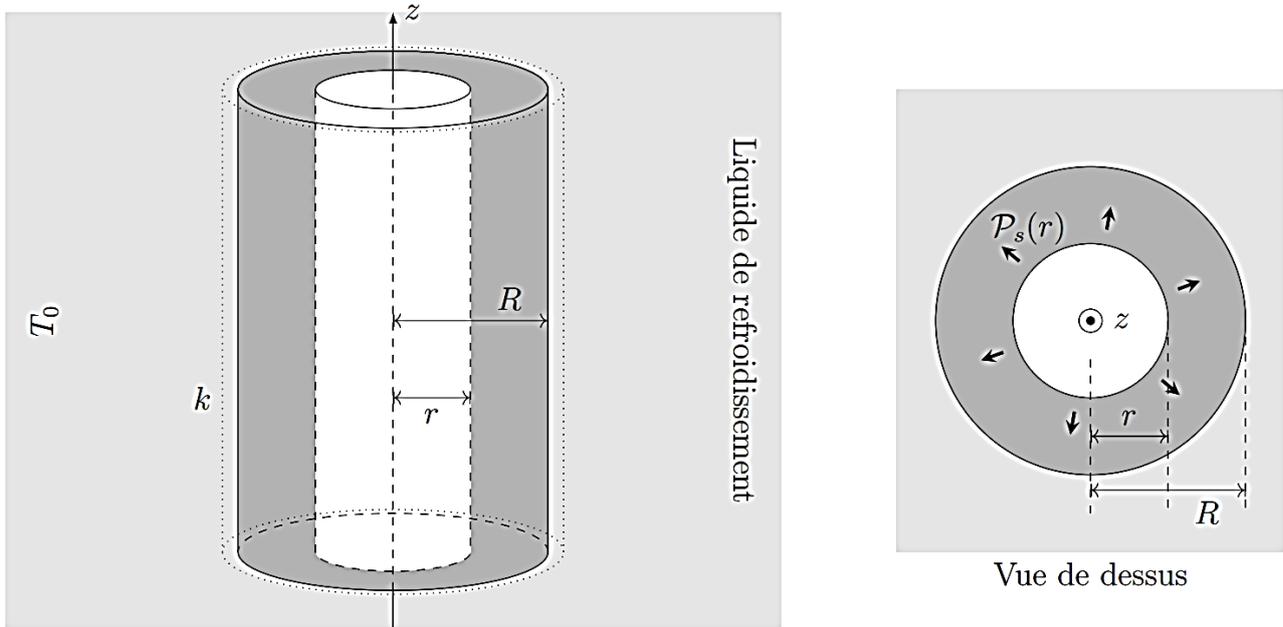


FIGURE 3 – Fil supraconducteur en régime stationnaire

- – 8. Exprimer la puissance totale $\mathcal{P}_s(r)$ évacuée par une hauteur H de la partie du fil située au plus à la distance r de l'axe avec $0 \leq r < R$, cf. figure 3.
- – 9. En déduire, en régime permanent, l'intensité $j_{th}(r)$ de la densité volumique de flux thermique conductif dans le fil.
- – 10. Déterminer l'expression de la température de surface T_s en fonction de T_0 , k , p_u et R .
- – 11. À quel endroit dans le fil la température est-elle maximale?
Déterminer l'expression de la valeur T_{max} correspondante.
Montrer que le phénomène de *quench* ne se produit pas si p_u est inférieur à une valeur critique p_{max} que l'on exprimera.

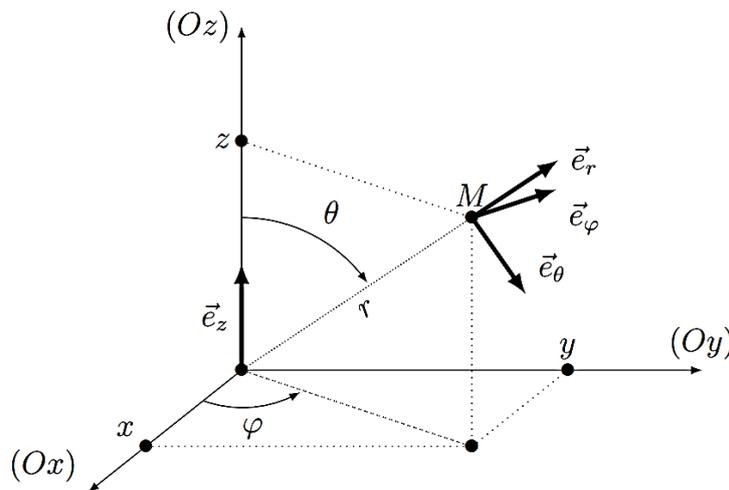
Données :

Données numériques

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Constante d'Avogadro	\mathcal{N}_A	$6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	R	$8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Repérage sphérique d'un point M

Le point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) peut aussi être repéré par ses coordonnées sphériques r, θ et φ rappelées sur le schéma ci-après :



Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$