Feuille d'exercices n°79

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{G} = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.

1. Montrer que G est un groupe pour l'addition.
2. Montrer $\mathrm{G}^* = \mathrm{G} \setminus \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.

Exercice 2 (*)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe tel que $x \mapsto x^2$ soit un morphisme de groupes. Montrer que G est abélien.

Exercice 3 (*)

Décrire les groupes d'ordre 5.

Exercice 4 (*)

Déterminer deux groupes d'ordre 6 non isomorphes.

Exercice 5 (**)

1. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 6 (*)

Soit $n \geqslant 2$. Calculer
$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)$$

Exercice 7 (**)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ fini d'ordre n et k entier premier avec n. Montrer que pour tout $g \in \mathrm{G}$, il existe un unique $x \in \mathrm{G}$ tel que $g = x^k$.

Exercice 8 (**)

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 9 (**)

Soit n entier non nul et d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ de cardinal d.

Exercice 10 (**)

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que S_n est engendré par les permutations suivantes :

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1 & n\end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}n-1 & n\end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}$.

Exercice 11 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, n un entier non nul et $(\mathrm{X}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes avec $\mathrm{X}_i \sim \mathscr{U}_{[\![1\,;\, i]\!]}$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. On pose

$$\sigma_n = \begin{pmatrix}1 & \mathrm{X}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \mathrm{X}_2\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}n & \mathrm{X}_n\end{pmatrix}$$

Montrer que $\sigma_n \sim \mathscr{U}_{\mathrm{S}_n}$.

Exercice 12 (**)

Soit n entier non nul. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, on pose $\mathrm{M}_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{(i,j)\in[\![0\,;\, n-1]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application canoniquement associée. Déterminer la nature de l'application de $\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\sigma\in\mathrm{S}_n} f_\sigma$ et préciser son noyau et son image.

Exercice 13 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer un sous-groupe de $\mathbb{R}$ isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.