ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°80

Exercice 1 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe et $\mathrm{A} \subset \mathrm{G}$. On définit le *centralisateur* de A noté C(A) par

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{G} \mid \forall a \in \mathrm{A} \quad ax = xa\}$$

1. Montrer que C(A) est sous-groupe de G et $\mathrm{C}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{C}(\mathrm{A})$.
2. Montrer que $\mathrm{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{C}(\langle \mathrm{A} \rangle)$.
3. Déterminer $\mathrm{C}(\mathrm{S}_n)$ pour $n \geqslant 3$.

Exercice 2 (***)

Soit G un groupe fini vérifiant $\qquad \forall x \in \mathrm{G} \qquad x^2 = e$

1. Montrer que G est un groupe abélien.
2. On suppose que G est fini non réduit à $\{e\}$.
   (a) Justifier l'existence de $n = \min\{\text{Card P},\ \mathrm{P} \subset \mathrm{G} \text{ tel que } \langle \mathrm{P} \rangle = \mathrm{G}\}$ entier non nul.
   (b) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{G}^n$ tel que $\mathrm{G} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. On pose
   $$\varphi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to \mathrm{G},\ (\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \{0, 1\}$$
   Justifier que φ est bien définie et vérifier que φ est un morphisme de de groupes.
   (c) Conclure que $\qquad \mathrm{G} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

Exercice 3 (***)

Soient p et q des entiers non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{U}_p \times \mathbb{U}_q \to \mathbb{U}_{pq}, (x, y) \mapsto xy$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 (***)

Soit $n \geqslant 2$. On note D_n les *dérangements* de S_n, c'est-à-dire les permutations de S_n sans point fixe. Calculer $\sum_{\sigma \in \mathrm{D}_n} \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 5 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe cyclique et H un sous-groupe de G. Démontrer que H est cyclique.

Exercice 6 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ une groupe fini d'ordre n et $x \in \mathrm{G}$ avec $o(x) = d$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad o(x^k) = \frac{d}{d \wedge k}$$

Exercice 7 (***)

Quel est l'ordre maximal d'un élément de S_8 ?

Exercice 8 (***)

Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, \times)$ vers un autre groupe. Établir

$$\text{Card } G = \text{Card Ker } \varphi \times \text{Card Im } \varphi$$

Exercice 9 (****)

Décrire les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.