ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°81

Exercice 1 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe. Pour $a \in \mathrm{G}$, on note

$$\forall x \in \mathrm{G} \qquad \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

1. Montrer que φ_a est un automorphisme de G pour tout $a \in \mathrm{G}$.
2. Montrer que $\mathcal{I} = \{\varphi_a, a \in \mathrm{G}\}$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de G.
3. Montrer que si $(\mathcal{I}, \circ)$ est monogène, alors $(\mathrm{G}, \times)$ est commutatif.

Indications : 1. Pour $a \in \mathrm{G}$, vérifier que φ_a est un morphisme de $(\mathrm{G}, \times)$ dans lui-même puis résoudre l'équation $y = \varphi_a(x)$ avec $(x, y) \in \mathrm{G}^2$ d'inconnue x.
2. Déduire du résultat précédent que tout élément de $\mathcal{I}$ admet un symétrique dans $\mathcal{I}$ puis vérifier la stabilité par composition.
3. Pour $(b, c) \in \mathrm{G}^2$, écrire φ_b et φ_c comme élément de $\mathcal{I} = \langle \varphi_a \rangle$ avec $a \in \mathrm{G}$ puis interpréter $bcb^{-1}c^{-1}$ à l'aide de φ_b et φ_c.

Exercice 2 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe fini d'ordre n. Montrer que

1. G est isomorphe à un sous-groupe de S_n ;
2. G est isomorphe est à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Indications : 1. Considérer $\Phi : a \mapsto \varphi_a$ où $\varphi_a : \mathrm{G} \to \mathrm{G}, x \mapsto ax$.
2. Considérer $\chi : \mathrm{S}_n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \sigma \mapsto \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 3 (***)

Soient $(\mathrm{G}_1, \times)$ et $(\mathrm{G}_2, \times)$ deux groupes cycliques.

1. Pour $(x, y) \in \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$, déterminer l'ordre de (x, y) en fonction de $o(x)$ et $o(y)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ cyclique.

Indications : 1. Utiliser la loi produit sur $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ et les propriétés de divisibilité relatives à l'ordre d'un élément.
2. Supposer $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ cyclique, considérer un générateur (x, y) puis utiliser une relation liant pgcd et ppcm et observer des relations de divisibilité avec les ordres de x et y.

Exercice 4 (***)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe cyclique de cardinal n. Montrer que le cardinal de $(\mathrm{Aut}(\mathrm{G}), \circ)$ est $\varphi(n)$.

Indications : Notant $\mathrm{G} = \langle a \rangle$, observer que pour $f \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G})$, on a $f(a) = a^\ell$ avec un entier $\ell \in [\![0\,; n-1]\!]$ qui caractérise f puis utiliser ensuite un isomorphisme naturel entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et G.

Exercice 5 (***)

Décrire les groupes d'ordre 4.

Indications : Si G d'ordre 4 non cyclique, montrer qu'il contient deux éléments distincts x et y d'ordre 2 puis décrire G. Considérer alors un morphisme de groupes à valeurs dans $\left\{x^k y^\ell, (k,\ell) \in \{0,1\}^2\right\}$.

Exercice 6 (***)

Montrer qu'un groupe est fini si et seulement si l'ensemble de ses sous-groupes est fini.

Indications : Si l'ensemble des sous-groupes de G est fini, établir que $\mathrm{G} = \displaystyle\bigcup_{x \in \mathrm{F}} \langle x \rangle$ avec F partie finie de G puis montrer que $\langle x \rangle$ est fini pour tout $x \in \mathrm{F}$.

Exercice 7 (****)

Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}^n, +)$ avec n entier non nul sont deux à deux non isomorphes.

Indications : Montrer que n est le cardinal minimal d'une famille génératrice de $\mathbb{Z}^n$ puis considérer un isomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{Z}^m$ avec n et m entiers non nuls.