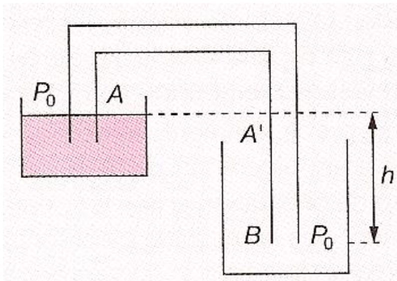
TD ThS 1 - Statique des fluides et facteur de Boltzmann

Exercice 1* : Composition de l'air

L'air atmosphérique est composé essentiellement de diazote et de dioxygène. Au niveau de la mer les fractions molaires des deux gaz vérifient $x_{N2} \approx 4x_{O2}$.
Dans le modèle de l'atmosphère isotherme à T=290K, calculer $\frac{x_{N2}}{x_{O2}}$ à 4000m d'altitude. Commenter.
On donne $M(N)=14 g.mol^{-1}$ et $M(O)= 16 g.mol^{-1}$

Exercice 2** : Fonctionnement d'un siphon

Un siphon peut être représenté par un tube en U à l'envers dans un récipient.



1) Donner l'expression de la pression P(z) en fonction de l'altitude z dans un fluide incompressible.
2) Le siphon a été amorcé, c'est-à-dire qu'on l'a rempli d'eau en aspirant en B. En supposant qu'il y a équilibre, relier les pressions en A et en B. On notera h la distance entre B et A'.
3) Expliquer pourquoi l'équilibre n'est pas possible.
4) Que se passe-t-il et quel est l'état d'équilibre final ?

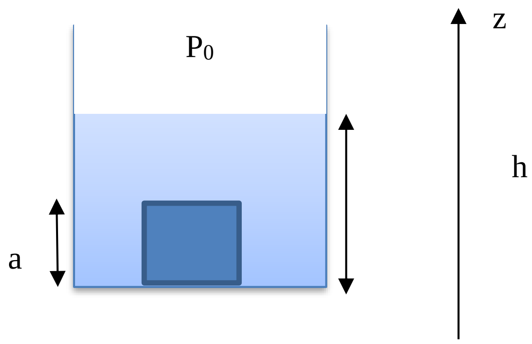
Exercice 3*** : Surface libre de l'eau dans un vase en rotation

Un vase contenant de l'eau (de masse volumique ρ) est mis en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe de symétrie vertical (Oz). On suppose le régime stationnaire atteint.

1) Dans quel référentiel peut-on appliquer la relation de la statique des fluides ?
2) Etablir l'expression de la pression dans l'eau en fonction de r et z en coordonnées cylindriques.
3) Quelle est la forme de la surface libre de l'eau ? (Calculer l'équation de cette surface).

Exercice 4**♥ : Cube dans l'eau

Un cube de glace de côté a et de masse volumique ρ est plongé dans un récipient contenant une hauteur h d'eau de masse volumique ρ_e. On suppose $\rho < \rho_e$



1) Le cube est posé au fond.
   a) Calculer la somme des forces de pression exercées par l'eau sur le cube.
   b) Est-ce conforme au théorème d'Archimède ?
2) Un peu d'eau s'est infiltrée sous le cube. Que se passe-t-il ? Calculer la position finale du cube.
   AN pour un glaçon : $\rho_{glace} = 917 kg.m^3$, calculer sa fraction volumique immergée.

Exercice 5**♥ : Ballon sonde

On considère un ballon sonde rempli de dihydrogène H_2 assimilable à une sphère de diamètre D.
La masse de la structure est m_B , le volume de la structure est négligeable devant le volume de H_2.
La température de l'atmosphère se comporte suivant la loi $T(z) = T_0(1 - \lambda z)$ où z est l'altitude.
L'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M_a

1) a) Montrer que la pression dans l'air est $P(z) = P_0(1 - \lambda z)^{\beta}$, exprimer β en fonction de g, M_a, R, T_0 et λ.
   b) En déduire la masse volumique ρ(z).
2) a) Déterminer la masse maximale m_c du ballon pour qu'il puisse décoller.
   b) Déterminer m_d la masse maximale du ballon pour qu'il puisse monter jusqu'à une altitude h.

Exercice 6***♥ : Pression et température au centre d'une étoile

On considère une étoile formée d'un gaz (supposé parfait) à la pression P(r), à la température T(r) et de masse volumique ρ(r). On suppose qu'il y a équilibre.

1) Déterminer les équations liant P(r), ρ(r) et T(r).

Indications : Ecrire la relation de la statique des fluides

Appliquer le théorème de Gauss à $\vec{g}$ le champ de gravitation dans l'étoile.

Ecrire l'équation d'état du gaz supposé parfait.

2) On fait l'hypothèse d'une masse volumique uniforme $\rho(r)=\rho_0$.

Calculer P(O) et T(O) où O est le centre de l'étoile.

On donne : $M_0 = 2.10^{30}$kg masse de l'étoile
$a = 7.10^{8}$m rayon de l'étoile
$G = 6{,}67.10^{-11}\,m^3kg^{-1}s^{-2}$
$M = 10^{-3}$kg.mol^{-1} masse molaire du gaz.

Réponses :

Ex 1 : $\frac{x_{N2}}{x_{O2}} = 4\,exp\left(\frac{(M_{O2}-M_{N2})gz}{RT}\right) = 4{,}27$

Ex 2 : 1) *A l'équilibre* $P(z) = P(0) - \rho gz$ 2) $P(B) = P(A) + \rho gh$ *à l'équilibre*
3) $P(A) = P_0$ *et* $P(B) = P_0$ *incompatible avec l'expression précédente donc équilibre impossible*
4) *Le fluide s'écoule jusqu'à ce que le siphon se désamorce en A.*

Ex 3 : 1) *Il faut se placer dans le référentiel tournant avec le vase.*
2) $P(r,z) = P_0 - \rho g(z-h_0) + \frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$
3) *Paraboloïde de révolution autour de (Oz)* (*Ecrire* $P=P_0$ *pour trouver l'équation de la surface libre*)

Ex 4 : 1) a) $\overrightarrow{F_{pression}} = -a^2[P_0 + \rho_e g(h-a)]\overrightarrow{u_z}$
b) *Cette force n'est pas égale à la poussée d'Archimède.*
2) *La pression totale est maintenant égale à la poussée d'Archimède.*
Position finale : le cube est en partie immergé, sa fraction volumique immergée est de 0,92.

Ex 5 : 1) a) $\beta = \frac{M_a g}{\lambda RT_0}$ b) $\rho = \frac{M_a P_0}{RT_0}(1-\lambda z)^{\beta-1}$
2) a) *Décollage si* $m_B < m_C = \frac{\pi D^3 P_0}{6RT_0}\left(M_a - M_{H_2}\right)$
b) *Pour monter à l'altitude h,* $m_B < m_d = \frac{\pi D^3 P_0}{6RT_0}\left(M_a - M_{H_2}\right)(1-\lambda h)^{\beta-1}$

Ex 6 : 1) $\frac{dP}{dr} = -\rho g$ $g(r) = \frac{G}{r^2}\int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')dr'$ $P(r) = \frac{\rho(r)RT}{M}$
2) $P(O) = \frac{3GM_O^2}{8\pi a^4} = 1{,}33.10^{14}\,Pa$ $T(O) = 1{,}15\,.10^{7}\,K$